

요인분석은 여러 변수들 사이의 공분산 구조 또는 상관 구조를 설명하는 하나 이상의 공통요인¹⁾의 구조를 정의하는 기법이다. 연구자는 경험 자료에서 얻은 공분산 구조를 적절히 반영하는 요인의 구조(요인의 수, 변수와 요인의 관계, 요인 사이의 관계 등)를 탐색하거나, 이론에 따라 사전에 설정한 요인의 구조가 경험 자료의 공분산 구조와 잘 부합하는지를 확인하기 위해 요인분석을 사용한다. 일반적으로 전자의 목적을 위해 수행되는 분석을 탐색적 요인분석, 후자의 목적을 위해 수행되는 분석을 확인적 요인분석으로 구분한다.

탐색적 요인분석은 일반적으로 측정 변수들의 상관 행렬에 대해 수행되며 크게 다음과 같은 세 단계의 과정을 거친다. 먼저 (1) 경험 자료의 상관 구조를 반영하기 위해 몇 개의 요인이 필요한지를 정하고(요인수의 결정), (2) 설정된 개수의 요인에 대하여 측정 변수들과 요인 사이의 관계를 나타내는 요인부하량(factor loading)의 최적 조합을 찾고(요인의 추출), (3) 요인이 둘 이상인 경우, 측정변수와 요인들 사이의 관계를 쉽게 해석할 수 있도록 이전 단계에서 찾은 요인부하량의 조합을 보다 단순한 구조로 변환한다(요인의 회전). 이 과정에서 이전 단계의 결과는 다음 단계에 영향을 미치기 때문에 첫 단계에서 요인의 개수가 잘못 설정되면 요인부하량의 최적 조합 추출과 요인의 회전 및 해석에서 오류가 발생한다. 따라서 첫 단계에서 요인수를 바르게 결정하는 것은 전체 분석 과정에서 매우 중요하다

1) 요인분석에서 요인은 둘 이상의 변수에 영향을 주는 공통요인(common factor)과 개별 변수에만 영향을 주는 고유요인(unique factor)으로 구분된다. 이 글에서는 편의상 공통요인을 '요인'으로 표기하고 고유요인은 '고유요인'으로 표기한다.

다(Fabrigar, Wegener, MacCallum, & Strahan, 1999; Fava & Velicer, 1992; Hayton, Allen, & Scarpello, 2004).

요인분석이 사용되기 시작한 이래 많은 연구자들이 요인의 개수를 결정하는 다양한 절차들(예, 스크리 검사, 카이제곱 검정, 평행분석 등)을 제안하였으며 실제 자료의 분석이나 모의실험(simulation)을 통해 이러한 절차들의 정확성을 평가하여 왔다(예, Preacher, Zhang, Kim, & Mels, 2013; Timmerman & Lorenzo-Seva, 2011; Zwick & Velicer, 1986). 그러나 요인의 개수를 결정하는 단일한 기준이나 절차에 대해서는 현재까지도 완전한 합의가 이루어지지 않고 있으며 요인수의 결정은 여전히 요인분석에서 가장 까다로운 문제로 남아 있다. 요인의 개수를 결정하는 데에는 분석 자료의 다양한 측면이 고려되지만 그 중에서 가장 빈번히 이용되는 정보는 상관행렬의 고윳값(eigenvalue)이다. 요인수 추정에 고윳값 정보를 이용하는 대표적인 절차로는 카이제 방법과 스크리 검사가 있으나 이 방법들보다 더 바람직한 절차로서 많은 연구자들이 평행분석(Parallel Analysis)의 사용을 권장한다(Fabrigar et al., 1999; Reise, Waller, & Comrey, 2000; Preacher & MacCallum, 2003).

평행분석(Horn, 1965)은 분석 자료에서 얻은 상관행렬의 고윳값들을 이에 대응하는 무선 자료에서 얻은 상관행렬의 고윳값들과 비교하여 요인의 개수를 결정하는 방법으로, 고윳값에 근거하여 요인수를 결정하기 위해 널리 사용되던 카이제 방법이 가지는 제한점을 극복하고자 제안되었다. 평행분석은 고윳값에 근거한 다른 절차들보다 논리적으로 더 나은 설명을 제공하고 경험적으로 더 높은 정확성을 보인다(Crawford et al., 2010; Hayton et al., 2004;

Zwick & Velicer, 1986). 그동안 SPSS나 SAS와 같은 범용 통계 프로그램에서 그 기능이 제공되지 않아 평행분석이 널리 사용되지 않았지만 이들 프로그램에서 사용할 수 있는 매크로 명령문이 공개되고(예, O'Conner, 2000) 평행분석이 가능한 범용 프로그램인 R의 사용도 늘면서 최근에는 연구자들 사이에서 점차 평행분석의 사용이 증가하고 있다.

그러나 요인의 개수를 결정하는 절차로서 평행분석이 갖는 이론적 타당성에 대해서도 여러 의문이 제기되어 왔다(Humphrey & Illgen, 1969; Mulaik, 2010; Turner, 1998). 또한 요인 간에 상관이 있거나 요인부하량이 낮은 경우처럼 평행분석이 좋지 않은 수행을 보이는 조건들도 지적되어 왔다(Crawford et al., 2010; Turner, 1998). 이러한 조건들은 평행분석의 이론적 제한점과 관련되어 있지만 이 관련성의 구체적인 내용 역시 잘 알려져 있지 않다. 더욱이 어떤 조건에서 평행분석을 이용한 요인수의 결정이 타당하고 어떤 조건에서 타당성이 낮은지에 관해 연구자들이 참고할 수 있는 지침도 명확하지 않다.

본 연구는 탐색적 요인분석에서 고윳값과 평행분석이 요인의 개수를 결정하는 데 사용될 수 있는 이론적 근거와 한계를 검토하였다. 또한 모의실험을 통해 평행분석의 사용이 타당한 조건들을 구체적으로 살펴보고 이를 통해 연구자들이 평행분석을 적절히 사용하기 위해 참고할 수 있는 지침을 제공하고자 하였다. 먼저 다음 절에서는 탐색적 요인분석이 가정하는 공통요인모형과 요인의 개수를 결정하는 데 사용되는 다양한 정보들을 소개하였다. 다음으로 고윳값을 이용하여 요인의 개수를 결정하는 여러 절차들과 이들의 논리적 근거를 살펴보고 평행분석의 이론적 문제점과

이를 개선하기 위한 수정 절차들을 검토하였다. 이어서 평행분석의 수행에 영향을 미치는 여러 조건들을 검토하고 이를 반영한 모의실험을 통해 각 조건에 따른 평행분석의 정확성을 평가하였다. 마지막으로 연구 결과에 기초하여 연구자들이 평행분석을 사용할 때 참고할 수 있는 표본크기에 관한 지침을 제시하였다.

공통요인모형과 요인수의 결정

공통요인모형

요인 개수의 결정과 관련된 논의에 앞서 이 논의에 대한 이해를 돕기 위해 먼저 탐색적 요인분석에서 일반적으로 가정하는 공통요인모형과 그 구성 요소들을 살펴보고자 한다. 공통요인모형을 따르는 변수들의 모집단 상관행렬 R (그리스 문자 '로')는 다음과 같은 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$P = \Lambda\Phi\Lambda' + \Psi \quad (1)$$

이 식에서 변수의 개수를 p , 요인의 개수를 f 라 할 때, $\Lambda_{p \times f}$ 는 요인과 변수 사이의 요인부하량으로 구성된 형태행렬, $\Lambda'_{f \times p}$ 는 $\Lambda_{p \times f}$ 의 행과 열이 바뀐 전치행렬, $\Phi_{f \times f}$ 는 요인들 사이의 상관행렬, $\Psi_{p \times p}$ 는 표준화된 각 변수의 고유요인의 분산(고유분산)이 대각에 오는 고유분산행렬을 나타낸다. 표준적인 공통요인모형에서 고유분산행렬의 비대각 요소는 모두 0으로 가정된다. 요인상관행렬 Φ 는 요인수가 하나인 경우나 둘 이상의 요인이 서로 상관이 없을 때는 항등행렬(identity matrix, I)이 되어 식 (1)에서 생략된다. 탐색적 요인분석에서 요인을 추출하는 단계에서 얻는 초기해(initial solution)

는 요인들이 서로 상관이 없고 독립적이라는 제약 하에 산출된다.

식 (1)은 모집단의 상관행렬이 오로지 요인의 구조($\Lambda\Phi\Lambda'$)에 의해 결정되는 이론적 모형이다. 그러나 일반적으로 연구자들은 변수들의 상관을 100% 설명하는 요인모형을 기대하거나 목표로 삼지 않으며 실질적으로 식 (1)의 우변이 좌변에 대해 유용한 근사값(approximation)을 제공하는 요인모형을 원한다. 다시 말해 연구자들은 변수들의 상관관계를 완전히 설명하기 위해 얼마나 많은 요인이 필요한가보다는 이를 수용할 만한 정도로 설명하기 위해 몇 개의 요인이 필요한가에 더 관심이 있다.

실제 자료에서 요인을 추출할 때에는 사전에 설정된 f 개의 요인에 대하여 변수들의 관측상관행렬(R)과 모형이 산출하는 예측상관행렬($\Lambda\hat{\Phi}\Lambda' + \hat{\Psi}$)이 최대한 유사하도록 우변의 해($\hat{\Lambda}$, $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$)를 추정한다. 또는 고유분산행렬을 좌변으로 이동시킨 다음의 식을 최대한 충족시키는 해를 추정한다.

$$R - \hat{\Psi} = \hat{\Lambda}\hat{\Phi}\hat{\Lambda}' \quad (2) \quad 1$$

식 (2)의 좌변의 행렬 $R - \hat{\Psi}$ 의 대각에는 1에서 각 변수의 고유분산의 추정값을 뺀 값이 오는데 이를 공통분(communality)이라 부르며 이는 각 변수의 분산 중 공통요인에 의해 설명된 분산의 비율을 나타낸다. 상관행렬의 대각에 공통분이 오는 이와 같은 행렬을 축소상관행렬(reduced correlation matrix)이라 한다. 자료에서 요인을 추출하기 위해서는 공통분의 초기 추정값이 필요한데 이 추정값으로는 각 변수와 나머지 전체 변수들 사이의 다중상관제곱(squared multiple correlation: SMC)이 가장 널리 사용된다. 실제 분석에서는 SMC를 공통

분의 초기값으로 설정한 후 반복 알고리즘을 거쳐 공통분의 최종 추정값을 얻는 것이 일반적이다.

앞서 언급한 바와 같이 요인 추출을 위해서는 먼저 요인의 개수를 설정하여야 한다. 일반적으로 요인수를 결정하기 위해 사용되는 정보는 상관행렬(R)이나 축소상관행렬($R - \hat{\Psi}$)의 고윳값, 요인 구조의 자료에 대한 적합도, 요인의 해석가능성 등이 있다(이순목, 윤창영, 이민형, 정선호, 2016; 장승민, 2015; Nunnally & Bernstein, 1994). 여기에서는 이를 구조적 요소, 모형 적합도, 고윳값의 순으로 구분하되 고윳값에 관한 내용은 다음 절에서 상세히 다룬다.

구조적 요소를 이용한 요인수의 결정

요인의 해석가능성은 요인의 구조(Λ 와 Φ)가 내용적으로 이해되고 이론적으로 설명될 수 있는가와 관련된다. 형태행렬 Λ 는 그 구성요소인 요인부하량을 통해 요인과 변수의 관련성에 대한 정보를 제공하며 각 요인은 해당 요인과 높은 요인부하량(예, .4 이상)을 갖는 변수들의 공통적 원인으로 해석된다. 요인들이 둘 이상인 경우에는 일반적으로 요인의 구조가 단순할 때 요인의 해석이 용이하다. 여기에서 단순한 구조란 각 요인과 높은 요인부하량을 갖는 변수 군이 서로 구분되는 요인 구조를 의미한다(그림 1). 초기해의 형태행렬은 단순구조를 갖지 않기 때문에 대부분의 경우 요인의 해석이 쉽지 않다. 이러한 경우 요인의 회전을 통해 초기해의 형태행렬을 동일한 상관행렬을 산출하지만 구조적으로는 더 단순하여 해석이 용이한 조합으로 변환할 수 있다.

기하학적으로 설명하면 형태행렬 Λ 는 f 차원 공간의 p 개 좌표값을 의미하며 이때 공간을

구성하는 축은 각 요인을, 좌표값은 각 변수의 위치를 나타낸다. 요인들이 서로 상관없이 독립적이면 요인 축은 서로 직각을 이루고 교차한다(직교요인). 요인 공간에서의 단순한 구조는 변수들이 균을 이루어 각 축에 가깝게 위치하는 것을 의미한다(그림 1). 따라서 요인의 회전은 수학적 동일성이 유지되도록 f 차원 공간에 놓인 변수들의 상대적 위치를 유지한 채, 각 축에 가까운 위치에 변수들이 무리를 이루도록 축을 회전하는 것을 의미한다. 이때 축과 축이 이루는 각이 서로 직각이 되도록 제약하는 회전을 직각회전(orthogonal rotation), 이러한 제약이 없는 회전을 사각회전(oblique rotation)이라고 한다. 사각회전을 통해 얻은 요인은 서로 상관을 갖고 이 경우 식 (1)에서 요인상관행렬 Φ 는 생략되지 않는다.

요인의 회전은 미리 설정된 개수의 요인을 추출한 초기해의 요인 구조를 최대한 해석이 가능한 형태로 변환하는 것이다. 따라서 회전 후에도 요인 구조를 해석하기가 어렵다면 요인의 개수가 잘못 설정되었을 가능성을 시사한다. 즉, 요인의 개수가 바르게 설정되었는지 여부는 최종적으로 회전 후 요인 구조를 확인함으로써 판단할 수 있다. 회전 후의 형태행렬에 의해 요인이 잘 해석되지 않는다면 요인의 개수를 달리하여 분석한 결과와 비교하여 해석가능성이 높은 방향으로 요인수를 결정할 수 있다(이순목 등, 2016; 장승민, 2015; Nunnally & Bernstein, 1994).

회전 후의 요인상관 역시 요인수 결정에 참고할 수 있다. 요인들 사이의 상관이 매우 높은 경우에는 요인의 개수가 과대 추정되었을 가능성이 있으므로 개수를 줄여 분석한 결과와 비교해 보아야 한다. 또한 회전 후 높은 요인부하량을 보이는 변수가 셋 이상이 되지

않는 요인이 모형에 포함되어 있는 경우에도 요인의 개수가 적절하게 설정되지 않았을 가능성을 검토할 필요가 있다(Fabrigar et al., 1999; Mulaik, 2010; Zwick & Velicer, 1986).

그러나 요인의 해석가능성과 요인 구조에 대한 평가는 요인의 개념적 영역과 이론에 비추어 질적으로 이루어지기 때문에 모든 연구에 통일된 기준을 적용하기 어렵다. 따라서 요인해의 구조적 요소에 대한 정보는 요인 추출 전에 적정 요인수를 추정하는 데 필요한 객관적 근거를 제공하기 위해서라기보다는 설정된 요인수의 내용적 타당성을 최종적으로 점검하기 위해서 사용된다고 볼 수 있다.

모형 적합도를 이용한 요인수의 결정

요인분석에서의 모형과 자료의 적합도 또는 반대의 개념인 모형과 자료의 불일치도는 요인분석의 해($\hat{\lambda}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$)에 의해 산출되는 모형에 측상관행렬($\widehat{A\hat{\phi}A'} + \hat{\psi}$)과 관측변수의 상관행렬(R)이 갖는 차이의 정도를 반영한다. 이 차이(불일치도)가 작으면 적합도가 높다고 하고 이 차이가 크면 적합도가 낮다고 한다. 좋은 모형 적합도를 보이는 요인모형은 요인의 개수가 적절하게 설정된 것으로 간주된다. 요인분석의 일반적 목적에 비추어 모형 적합도를 이

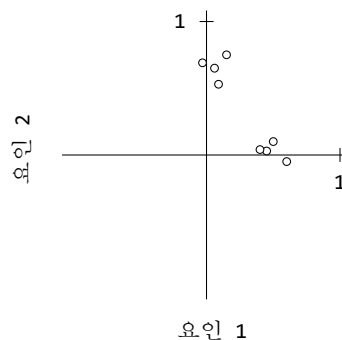


그림 1. 단순한 구조의 직교하는 두 요인과 변수들

용한 요인수의 판단은 대개 수용할 만한 크기의 적합도 또는 불일치도를 얻을 때까지 요인의 개수를 하나씩 늘려가는 방식으로 이루어진다.

표본 자료에서 얻을 수 있는 요인모형과 상관자료의 불일치도를 나타내는 가장 직관적인 값은 관측상관행렬과 예측상관행렬의 차이인 잔차상관행렬 $R - (\Lambda\Phi\Lambda' + \Psi)$ 의 크기이다. 실제로 요인 추출법의 하나인 최소제곱법은 잔차상관행렬의 각 요소의 제곱값의 합을 가장 작게 하는 요인을 추출한다. 잔차상관의 제곱값의 평균인 RMS(Root Mean Square Residuals)는 이 같은 논리에 근거한 불일치도의 지표로 이 값이 .08 이하인 경우 설정된 요인의 개수를 수용할 만한 것으로 평가한다(Hu & Bentler, 1999).²⁾ RMS는 값이 의미하는 바가 직관적이고 관측 변수의 분포에 대한 가정이 필요 없다는 장점이 있다. 그러나 이 지표는 모형의 복잡성이 고려되지 않아 요인의 수가 증가할수록 값이 작아지며 표본에서 얻는 값임에도 표집오차가 고려되지 않는다는 단점이 있다(Nunnally & Bernstein, 1994).

잔차상관행렬을 이용한 다른 접근으로는 최소편상관평균(minimum average partial: MAP) 방법이 있다(Velicer, 1976). 이 방법은 잔차상관행렬의 편상관행렬의 비대각요소의 제곱평균을 가장 작게 만드는 요인의 개수를 구한다. MAP 방법은 카이제 방법이나 카이제곱 검정(이하 설명 참고) 등의 전통적인 요인수 추정

2) 상관행렬을 분석하는 탐색적 요인분석에서 잔차상관의 크기를 나타내는 RMS는 공분산행렬을 분석하는 확인적 요인분석에서 잔차공분산의 크기를 상관의 단위로 표준화한 값인 SRMR(standardized root mean square residuals)과 동일하다.

절차보다 더 정확한 수행을 보이는 것으로 알려져 있으나 요인수를 과소 추정하는 경향이 있다(Zwick & Velicer, 1986). 또한 분석에 사용되는 잔차상관행렬이 요인모형에 의해 산출되지 않고 성분분석에 의해 산출되기 때문에 요인의 개수보다는 성분의 개수를 추정하는 절차로 이해하는 것이 더 적절하다.³⁾

변수들이 다변량 정규분포를 따른다고 가정할 수 있는 경우는 최대우도(maximum likelihood) 추출법을 사용하여 RMS보다 더 널리 사용되는 다양한 적합도 지수들을 얻을 수 있다. 최대우도법은 최소제곱법과 달리 우도를 이용하여 불일치를 정의하며 관측상관행렬과 예측상관행렬의 불일치의 크기에 비례하는 카이제곱(χ^2) 값을 산출한다. 요인모형의 카이제곱 값은 χ^2 분포를 이용한 통계적 검정에 사용되는데 이 검정은 다른 통계적 검정 절차와 마찬가지로 모형의 복잡성과 표집오차를 모두 고려하여 모형의 적합도를 평가한다. 카이제곱 검정에서 영가설이 기각되면 요인의 개수가 더 필요하다는 것을, 기각되지 않으면 요인의 개수가 충분하다는 것을 의미한다. 따라서 영가설이 기각되지 않을 때까지 요인의 개수를 하나씩 늘려가면서 요인의 수를 결정할 수 있다(Bartlett, 1950; Mulaik, 2010). 그러나 χ^2 값은 불일치의 크기뿐만 아니라 표본크기

3) 성분분석(component analysis)은 상관행렬(또는 공분산행렬)을 구성하는 변수들을 분산을 많이 설명하는 변수들의 선형조합(성분)과 적게 설명하는 조합으로 재구성하는 절차로 요인분석의 일종으로 간주되기도 하였다. 그러나 성분분석은 각 변수의 고유요인을 가정하지 않고 변수들이 요인들의 선형조합이라는 요인모형의 가정에 위배되기 때문에 많은 연구자들에 의해 더 이상 요인분석의 일종으로 받아들여지지 않는다(Fabrigar et al., 1999; Preacher & MacCallum, 2003).

에도 비례하기 때문에 표본크기가 작은 경우에는 불일치가 커도 영가설을 기각하지 못하는 경향이 있고, 표본크기가 큰 경우에는 불일치가 작아도 영가설을 기각하는 경향이 있다. 더구나 이 검정의 영가설은 수용 가능한 불일치가 아니라 완전한 일치이기 때문에 실질적으로 의미가 없는 사소한 요인들도 추출하는 경향이 있다(Fabrigar et al., 1999; Nunally & Bernstein, 1994).

카이제곱 검정의 이러한 문제점 때문에 최대우도법에 근거한 여러 대안적인 모형 적합도 지수들이 개발되어 사용된다. 이 지수들 중 TLI(Tucker-Lewis Index; Tucker & Lewis, 1973), CFI(Comparative Fit Index; Bentler, 1990), RMSEA(Root Mean Square Error of Approximation, Steiger & Lind, 1980)가 가장 널리 사용되며 일반적으로 TLI와 CFI는 .95 이상, RMSEA는 .06 이하일 때 좋은 적합도로 판단한다(Hu & Bentler, 1999). AIC(Akaike's Information Criterion)와 BIC(Bayesian Information Criterion)도 최대우도법에 근거한 불일치도의 지수로 사용될 수 있는데 이 경우 이 값을 가장 작게 산출하는 요인수를 최적으로 판단한다(Preacher et al., 2013).

고윳값을 이용한 요인수의 결정과 이론적 근거

전통적으로 고윳값은 요인의 개수를 결정하는데 가장 널리 사용되어 온 정보이다. 요인의 개수를 결정하기 위해 상관행렬이나 축소상관행렬의 고윳값 정보를 사용하는 것은 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 계수(rank)가 요인의 개수(f)와 같다는 사실에 근거한다.⁴⁾ 크기가 $p \times p$ 인 대칭행렬

4) 행렬의 계수란 행렬을 구성하는 벡터들 중 선형적으로 독립적인, 즉 행렬 내 다른 벡터의 선형

$\Lambda\Phi\Lambda'$ 는 p 개의 고윳값을 가지는데 이 중 0보다 큰 고윳값의 개수는 이 행렬의 계수이자 요인의 개수인 f 와 같고 나머지 $p-f$ 개의 고윳값은 0이다.⁵⁾ 그림 2(a)의 빈 점은 그림 1에서 예시된 두 직교요인 공간의 8개 변수의 좌표값 Λ 에 의해 산출된 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 고윳값을 크기의 순서대로 나열한 것이다($\Lambda\Phi\Lambda' = \Lambda\Lambda', \cdot \Phi = I$). 이 그림에서 보듯이 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 양의 고윳값은 요인의 개수와 같은 2이고 나머지 6개의 고윳값은 0이다. 식 (1)에서와 같이 모집단의 상관구조가 공통요인모형을 정확히 따르는 경우는 축소상관행렬인 $P-\Psi$ 와 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 이 대수적으로 서로 동일하기 때문에 축소상관행렬의 양의 고윳값의 개수가 곧 요인의 개수가 된다. 그러나 실제 분석에서는 축소상관행렬의 근사값 $(R-\hat{\Psi})$ 이 추정되기 때문에 두 행렬 사이에 식 (2)의 등식이 성립하지 않으며 따라서 두 행렬의 대수적 관계에 의해 요인수가 확정될 수 없다. 다만 이 경우 축소상관행렬의 고윳값과 요인의 개수 사이의 이와 같은 관련성을 반영

조합으로 얻어질 수 없는 고유한 벡터의 개수를 의미한다. 예를 들어 서로 다른 두 개의 변수(벡터)로 구성된 행렬의 계수는 2이며 이 두 변수를 합하여 만든 변수가 추가되어 세 개의 변수로 구성된 행렬의 계수도 2이다. 또한 이 변수 세트 각각의 상관행렬의 계수도 모두 2이다. 변수가 p 개이고 요인이 f 개일 때 크기가 $p \times p$ 인 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 는 요인들의 선형조합으로 이루어지기 때문에 이 행렬의 계수는 요인의 개수와 같은 f 이다.

5) 상관행렬이나 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 와 같은 대칭행렬의 크기가 $p \times p$ 일 때 이 행렬은 p 개의 고윳값을 갖는다. 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 각 요소는 벡터의 곱으로 구성되는데 이러한 특성을 갖는 행렬을 그램 행렬(Gramian matrix)이라고 한다. 그램 행렬의 고윳값은 음수가 될 수 없으며 양의 고윳값의 개수는 이 행렬의 계수와 같다. 따라서 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 고윳값 중 f 개는 0보다 크고 $p-f$ 개는 0이다.

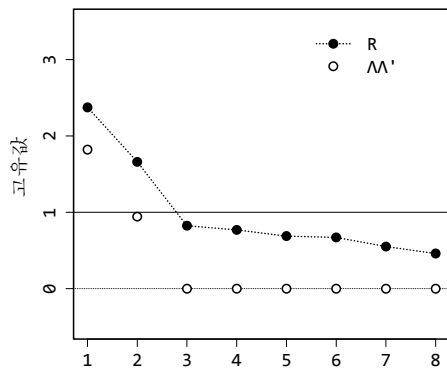
하여 다음과 같은 여러 가지 어림법(heuristics)이 요인수 결정에 사용된다.

카이저 방법

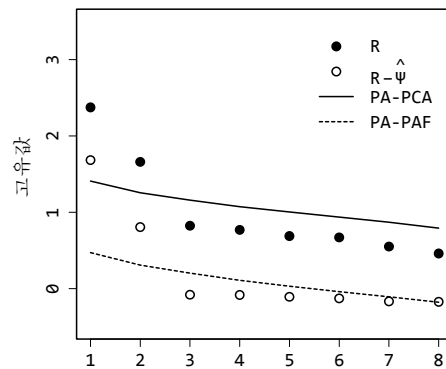
Kaiser(1960)는 상관행렬의 고윳값 중 1보다 큰 것의 개수를 요인의 개수로 삼을 것을 제안하였다(카이저 규칙). 그림 2의 검은 점은 그림 1의 자료에 의해 산출된 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 대각에 공통분 대신 1을 넣어 구성된 상관행렬(R)의 고윳값을 크기 순서로 나열한 것이다. 이 중 1보다 큰 고윳값은 실제 요인의 개수와 같은 2이다.

카이저 규칙은 상관행렬의 1보다 큰 고윳값의 개수가 대각이 0인 축소상관행렬의 0보다 큰 고윳값의 개수와 동일하다는 것에 근거한다(Guttman, 1954). 그러나 0은 공통분의 가장 낮은 추정치이기 때문에 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 에 대한 충분한 근사값을 제공하지 못한다(Mulaik, 2010). 게다가 축소상관행렬이 아닌 상관행렬의 고윳값은 공통요인보다는 고유분산을 가정하지 않는 주성분분석(Principal Component Analysis:

PCA)의 성분의 속성을 나타낸다. 따라서 카이저 방법은 이론적으로 충분한 근거를 갖는다고 보기 어렵다. 오히려 이 방법의 사용 근거는 이론적인 측면보다는 실용적인 측면에 있다(Kaiser, 1960). 예를 들어 각각의 고윳값은 이에 대응하는 각 성분이 설명하는 변수들의 분산의 총합을 의미하는데, 이 값이 개별 변수의 표준화된 분산(=1)보다 작다면 그 성분은 고려할 필요성이 낮다고 판단할 수 있다(Floyd & Widaman, 1995). 이는 요인이 존재하지 않으면 변수 간의 상관이 모두 0이 되고 이 상관행렬(항등행렬)의 고윳값은 모두 1(고윳값의 평균)로 동일하다는 사실과도 관련된다. 그러나 카이저 규칙은 요인수 추정의 정확성이 낮고 특히 변수의 개수가 많을 때 요인수를 심각하게 과대 추정한다는 것이 여러 모의실험 연구에서 확인되었다. 이러한 이유로 카이저 규칙은 오늘날 요인의 개수를 결정하기 위한 절차로서 가장 피해야 할 방법으로 평가된다(Dinno, 2009; Fabrigar et al., 1999; Glorfeld, 1995; Preacher & MacCallum, 2003;



(a)



(b)

그림 2. 그림 1의 2-요인 구조의 고윳값과 평행분석. (a) 상관행렬(R)의 고윳값(검은 점)과 $\Lambda\Phi\Lambda'$ ($=\Lambda\Lambda'$)의 고윳값(빈 점). (b) 상관행렬(R)과 축소상관행렬($R-\hat{\psi}$, 대각은 SMC)에 대한 평행분석. PA-PCA: 무선 상관행렬의 고윳값의 평균. PA-PAF: 무선 축소상관행렬의 고윳값의 95백분위수.

Velicer, Eaton, & Fava, 2000).

스크리 검사

카이저 규칙의 대안적인 방법으로 널리 사용되는 스크리 검사(Cattell, 1966)는 고윳값의 절대적인 수치보다는 고윳값의 상대적인 차이가 보이는 형태를 이용해 요인의 수를 결정한다. 이 방법은 상관행렬이나 축소상관행렬의 고윳값을 크기 순서로 그린 후(스크리 도표), 이 그림의 왼편에 오는 고윳값이 큰 부분(돌산)과 오른편에 오는 고윳값이 작고 완만하게 감소하는 부분(스크리: 자갈 비탈)을 시각적으로 구분하여 스크리에 포함되지 않는 고윳값의 수를 요인의 수로 정한다. 그림 2(a)의 상관행렬의 스크리 도표에서는 3번째부터 마지막까지의 고윳값이 스크리에 해당하여 요인이 2개라고 판단할 수 있다.

앞서 언급한 바와 같이 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 고윳값은 f 개(요인의 개수)의 양의 고윳값과 $p-f$ 개의 0의 고윳값으로 구성된다. 따라서 이 행렬의 스크리 도표는 왼편의 양의 고윳값 부분과 오른편의 0의 고윳값 부분이 뚜렷하게 구분된다. 그림 2에서 보듯이 상관행렬 R 의 고윳값(검은 점)과 SMC로 추정된 축소상관행렬 $R-\hat{\psi}$ 의 고윳값(그림 2(b)의 빈 점)은 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 고윳값(그림 2(a)의 빈 점)과 유사한 형태를 띤다. 특히 표본의 크기가 크면 표집오차가 작아지기 때문에 이들 사이의 형태적 유사성은 더욱 커진다. 개념적으로는 상관행렬의 스크리 도표와 축소상관행렬의 스크리 도표 중 후자의 사용이 더 합당하다(Fabrigar, 1999; Mulaik, 2010). 그림 2에서도 축소상관행렬의 스크리 도표가 상관행렬의 스크리 도표보다 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 고윳값의 형태에 더 가까운 것을 확인할 수 있다. 스크리 검사는 카이저 규칙에 비해 요인의 개수를

더 정확히 추정하고 전반적인 정확성도 높다고 평가된다. 그러나 이 검사는 표본크기가 작거나 공통분이 낮은 조건에서는 정확성이 낮고, 스크리의 구분이 모호하거나 주관적일 수 있기 때문에 다른 기준과 함께 사용하도록 권장된다(Fabrigar et al., 1999; Velicer et al., 2000).

평행분석

카이저 규칙이나 스크리 검사에는 이 절차들의 타당성을 위협하는 더 본질적인 문제점이 있다. 요인분석에 사용되는 실제 자료는 거의 언제나 모집단에서 추출된 표본 자료이다. 따라서 표본 자료를 분석하여 모집단의 요인수를 추정할 때에는 모집단과 표본 사이의 차이로 인한 표집오차를 고려하여야 한다. 그러나 카이저 규칙이나 스크리 검사에서는 표본 고윳값이 표집오차로 인해 모집단 고윳값과 갖는 차이가 고려되지 않는다. Horn (1965)은 관측 표본의 고윳값의 표집오차를 고려하기 위해 이를 무선 표본 자료의 고윳값과 비교하여 요인수를 추정하는 방법을 제안하였는데 이것이 오늘날 평행분석이라고 알려진 절차이다.

평행분석에서는 관측 자료의 상관행렬에서 얻은 고윳값을 관측 자료와 평행한 크기(동일한 표본크기와 변수의 개수)의 무선 자료의 상관행렬에서 얻은 고윳값과 크기 순서대로 비교하여, 관측 자료의 값이 무선 자료의 값보다 더 작아지기 전까지의 고윳값의 개수를 요인의 개수로 정한다. Horn(1965)은 무선 자료의 고윳값을 정규분포에서 독립적으로 생성된 무선 자료의 상관행렬에서 얻었으며 이 과정을 여러 번 반복하여 얻은 고윳값의 분포의 평균을 평행분석에 사용하였다. 그림 2(b)의

실선은 정규분포에서 추출된 표본크기가 100인 8개의 무선 벡터 자료의 상관행렬의 고윳값을 200회 반복하여 얻은 평균값을 연결한 것이다. 이 그림에서 관측 자료의 고윳값(검은 점) 중 첫 번째와 두 번째는 실선 위에 있지만 세 번째는 실선 아래에 있다.

무선 표본의 변수들은 서로 독립적으로 생성되기 때문에 상관이 없을 것으로 기대되지만 개별 무선 표본의 변수들은 우연적인 표집 오차에 의해 거의 언제나 0이 아닌 상관값을 갖는다. 표집오차에 의해 무선 표본의 상관행렬이 항등행렬에서 조금이라도 벗어나면 그 행렬의 고윳값은 항상 1보다 큰 값과 작은 값으로 구성된다. 평균적으로 무선 표본의 상관행렬의 고윳값의 절반은 1보다 큰 양의 편향을, 절반은 1보다 작은 음의 편향을 가지며 첫 번째 고윳값에서 마지막 고윳값으로 갈수록 점진적으로 작아지는 형태를 띤다. 무선 표본 고윳값에서 나타나는 이와 같은 편향을 최소제곱 편향이라 부른다(Horn, 1965; Turner, 1998). 따라서 표본 상관행렬의 고윳값의 크기로 요인의 존재를 추론하기 위해서는 요인이 존재하지 않는 '모집단'의 상관행렬(항등행렬)의 고윳값(1, 카이저 규칙)이 아니라 이 모집단에서 생성된 '무선 표본'의 상관행렬의 고윳값(평행분석)과 비교해야 한다. 평행분석은 관측 자료의 고윳값이 무선 자료에서 얻어진 고윳값과 같거나 더 작은 경우에는 이를 표집오차에 의한 우연의 결과로 간주하며 오직 요인에 의해 설명되는 변수들의 분산이 우연으로 인한 허위 요인에 의해 설명되는 분산보다 큰 경우에만 이를 실제 요인의 반영으로 여긴다(Hayton et al., 2004).

평행분석은 표본 고윳값의 표집오차와 이로 인한 표본 고윳값의 편향을 고려한다는 점에

서 카이저 규칙이나 스크리 검사에 비해 이론적으로 더 나은 근거를 가진다. 모의실험을 이용한 다수의 경험적 연구들도 평행분석이 다른 절차들에 비해 요인수를 더 정확히 추정한다는 것을 보여 왔다(Crawford et al., 2010; Hayton, 2004). 이러한 이유로 평행분석은 요인수 추정의 절차로서 연구자들에 의해 가장 폭넓은 지지를 받고 있다(Fabrigar et al., 1999; Reise, Waller, & Comrey, 2000; Preacher & MacCallum, 2003). 그러나 Horn의 평행분석 절차가 여러 측면에서 이론적 타당성이 부족하다는 지적도 꾸준히 제기되어 왔다. 또한 일부 모의실험에서 Horn의 평행분석이 요인수를 과대 추정하는 경향이 있다는 것이 보고되기도 하였다(Glorfeld, 1995; Zwick & Velicer, 1986). 다음 절에서는 Horn의 평행분석 절차의 타당성에 대해 제기된 비판들과 이를 극복하기 위해 제안된 여러 수정 절차들을 정리하였다.

평행분석에 대한 비판과 수정 절차

앞서 언급한 바와 같이 Horn의 절차는 '정규분포'에서 생성한 무선 표본의 '상관행렬'의 고윳값 세트를 여러 번 얻은 후 각 고윳값의 표집분포의 '평균'을 구하여 이를 실제 표본의 상관행렬의 고윳값과 비교한다. Horn의 절차가 소개된 이래 일부 연구자들은 이 절차가 무선 고윳값들의 평균을 비교의 기준으로 삼는 것, 무선 자료를 정규분포에서 생성하는 것, 그리고 고윳값을 상관행렬에서 얻는 것에 대해 각각 문제점을 제기하였고 그에 따른 대안적인 접근법들을 제안하였다.

무선 고윳값의 평균 사용에 대한 비판

관측 자료의 고윳값을 무선 자료의 고윳값 표집분포의 평균과 비교하는 것에 대한 문제 제기는 허위 요인을 잘못 탐지하는 1종 오류를 적절히 통제할 수 있는 유의수준의 설정과 관련된다. 평행분석은 관측 자료와 무선 자료의 고윳값의 차이가 요인이 없는 모형(영가설)을 기각할 만큼 크지를 판단한다는 점에서 가설검증의 논리를 따르고 있다. 이때 무선 고윳값의 평균을 관측 고윳값과 비교하는 기각값으로 사용하면 요인이 존재하지 않는 모집단에서 관측 표본이 추출된 경우에도 표본 상관행렬의 고윳값이 무선 고윳값보다 더 크게 나타날 가능성이 약 50%가 된다. 즉, 요인이 없다는 영가설이 잘못 기각될 1종 오류의 가능성이 약 .5가 되는 것이다. 이는 평행분석에 의해 요인수가 과대 추정되는 결과를 가져온다. 이러한 이유로 몇몇 연구자들은 1종 오류의 가능성을 좀 더 엄격하게 낮추기 위해 무선 고윳값 표집분포의 평균 대신 95백분위수를 비교의 기준으로 사용할 것을 제안하였다(Buja & Eyuboglu, 1992; Glorfeld, 1995). 모의실험의 결과 역시 차이가 크지는 않았지만 평균보다 95백분위수를 비교의 기준으로 사용할 때 전반적으로 요인수를 과대 추정하는 오류가 적게 발생하였다(Buja & Eyuboglu, 1992; Glorfeld, 1995; Timmerman & Lorenzo-Seva, 2011). 따라서 평행분석에서 사용하는 무선 고윳값의 기각값은 평균보다는 95백분위수를 사용하는 것이 더 타당하다고 할 수 있다.

정규 무선 자료의 사용에 대한 비판

무선 자료를 정규분포에서 생성하는 것에 대한 우려는 요인분석에 사용되는 관측 변수

들이 정규분포를 따른다고 가정하기 어려운 경우가 흔하다는 점에 기인한다. Horn(1965)은 예시에 사용한 실제 표본의 변수들을 정규분포에 가깝도록 변환한 후 평행분석을 실시하였다. 그러나 이와 같은 변환이 항상 가능한 것은 아니며 또한 정규성을 위한 비선형 변환은 변수들의 선형적 관련성을 왜곡하여 다른 문제점들을 발생시킨다. 더욱이 Horn은 무선 자료를 정규분포에서 생성하는 이유에 대해 이렇다 할 설명을 제시하지도 않았다. 이러한 이유로 무선 정규분포 자료가 아닌 관측 표본의 각 변수의 관찰값의 순서를 독립적으로 뒤섞은 무선 순열(random permutation) 자료를 평행분석에 사용하는 방법이 제안되었다(Buja & Eyuboglu, 1992).

무선 순열 자료의 각 변수의 분포는 관측 표본의 해당 변수의 분포와 동일하면서도 각 변수들이 독립적으로 뒤섞이기 때문에 변수들 사이의 상관의 기댓값이 0이 된다. 그러나 모의실험의 결과에 따르면 무선 상관행렬의 고윳값의 분포(예, 평균, 95백분위수)는 무선 자료가 추출되는 모집단 분포의 형태에 거의 영향을 받지 않는 것으로 나타났다(Dinno, 2009; Glorfeld, 1995). 또한 정규분포에서 생성한 무선 자료와 무선 순열로 구성된 무선 자료의 고윳값의 분포도 거의 차이를 보이지 않았다(Buja & Eyuboglu, 1992; Timmerman & Lorenzo-Seva, 2011). 따라서 관측 자료의 분포와 상관 없이 정규분포에서 생성한 무선 표본을 평행분석에 사용하는 것은 큰 문제가 없다고 할 수 있다.

상관행렬의 고윳값 사용에 대한 비판

평행분석 절차의 타당성에 대해 가장 논쟁이 되는 부분은 아마도 평행분석을 상관행렬

에 대해 수행하는 것의 적절성 여부일 것이다. Horn(1965)은 애초 표집오차를 고려하지 않는 카이제 방법의 대안으로 평행분석을 제안하였다. 그러나 상관행렬에 대한 평행분석은 고유분산을 가정하지 않는다는 점에서 카이제 방법과 마찬가지로 잘못된 행렬에 기초한 것이며(Mulaik, 2010, p. 191), 요인보다는 PCA의 성분의 개수를 결정하는 절차에 더 가깝다고 할 수 있다(Humphreys & Ilgen, 1969; Timmerman & Lorenzo-Seva, 2011). 이러한 이유로 Humphreys와 Ilgen은 상관행렬 대신 공통분의 추정치(SMC)가 대각에 들어가는 축소상관행렬에 대한 평행분석 절차를 제안하였다. 이 방법은 관측 자료의 축소상관행렬($R-\hat{\psi}$)의 고윳값과 무선 자료의 축소상관행렬의 고윳값을 비교한다. 그림 2(b)의 빈 점은 축소상관행렬의 고윳값, 점선은 무선 자료(200개)의 축소상관행렬의 고윳값의 95백분위수를 나타낸다. 이 글에서는 이 두 절차를 구분하기 위해 상관행렬에 대한 평행분석을 PA-PCA(parallel analysis with principal component analysis)로, 축소상관행렬에 대한 평행분석을 PA-PAF(parallel analysis with principal axis factoring)로 표기한다.

상관행렬과 축소상관행렬을 사용한다는 차이의 중요성에도 불구하고 PA-PCA와 PA-PAF의 정확성을 직접 비교한 연구는 거의 없었다. 모의실험을 이용하여 이 두 절차의 정확성을 다양한 조건에서 비교한 연구로는 Crawford 등(2010)이 거의 유일하다. 이 연구에 따르면 요인이 하나인 조건과 복수의 요인(2개 또는 4개)이 서로 상관이 없는 조건에서는 PA-PAF보다 PA-PCA의 정확률이 조금 더 높았던 반면 여러 요인이 서로 상관(.4 또는 .7)을 갖는 조건에서는 PA-PCA보다 PA-PAF가 더 높은 정확률을 보였다. 반면 순서형 다분변수에 대한

평행분석에서는 PA-PAF의 정확률이 PA-PCA에 비해 매우 낮게 나타났다(Timmerman & Lorenzo-Seva, 2011). Buja와 Eyuboglu(1992)도 PA-PAF가 PA-PCA에 비해 더 많은 요인수를 추정하는 경향이 있다고 지적하였다. 공통요인모형에 부합하는 축소상관행렬의 무선 고윳값을 비교 기준으로 사용함에도 불구하고 PA-PAF의 정확도가 PA-PCA보다 낮은 경향을 보이는 이유에 대해 명확하게 설명하는 문헌은 찾기 어렵다. 다만 이 문제는 요인수 추정의 정확성에 영향을 미치는 여러 조건들과 복잡하게 관련되어 있을 것으로 짐작된다.

둘 이상의 요인 개수 추정에 대한 비판

지금까지 논의한 세 가지 문제보다 덜 주목받아 왔지만 사실상 평행분석의 타당성에 의구심을 갖게 하는 더 본질적인 문제는 평행분석이 요인이 여러 개일 때 요인의 개수를 결정할 수 있는 적절한 비교값을 제공해 주는가에 대한 것이다. 평행분석은 요인이 가정되지 않은 무선 자료의 고윳값과 실제 자료의 고윳값을 비교한다. 무선 자료는 요인의 개수가 0인 모형(무요인 모형)에서 생성된 것이기 때문에 실제 자료의 첫 번째 고윳값이 무선 자료의 첫 번째 고윳값보다 우연 수준 이상으로 크다면 이는 적어도 하나 이상의 요인이 존재한다는 근거가 될 수 있다. 그러나 적어도 두 개 이상의 요인이 존재한다고 판단하기 위해서는 실제 자료의 두 번째 고윳값이 요인의 개수가 하나인 모형에서 생성된 무선 자료의 두 번째 고윳값보다 우연 이상으로 더 커야한다. Turner(1998)는 모의실험을 통해 1요인 모형에서 생성된 무선 자료의 두 번째 고윳값의 평균이 무요인 모형에서 생성된 무선 자료의 두 번째 고윳값의 평균과 다르다는 것을 보였

다. 게다가 이 둘의 차이는 첫 번째 요인의 고윳값의 크기, 요인 구조의 형태, 표본 크기 등에 따라서도 달랐다. 즉, 평행분석이 제공하는 무선 고윳값을 둘 이상의 요인의 개수를 추정하기 위해 사용하는 것은 부정확한 결과를 가져올 수 있다.

이와 같은 문제의식에 따라 Turner(1998)는 비교에 사용되는 평행분석의 무선 고윳값을 요인의 개수를 반영하여 재산출된 모집단 상관행렬로부터 얻는 절차를 제안한 바 있다. 이 절차의 기본 아이디어는 평행분석에 의해 첫 번째 요인의 존재가 확인되면 식 (1)을 이용하여 1요인 모형의 상관행렬을 산출하고 이 상관행렬을 모집단으로 하는 무선 표본에서 두 번째 고윳값을 비교값으로 얻는다. 이렇게 얻어진 비교값보다 표본 상관행렬의 두 번째 고윳값이 크면 두 번째 요인이 존재한다고 판단한다. 이후의 무선 고윳값의 비교도 같은 방식으로 진행한다. 그러나 Turner의 이와 같은 아이디어를 직접 구현하여 모의실험을 실시한 연구(Green, Levy, Thompson, Lu, & Lo, 2012; Green, Thomson, Levy, & Lo, 2015)의 결과는 수정된 평행분석의 절차가 전통적인 평행분석보다 요인수를 더 잘 추정한다는 것을 보이지 못하였다.

지금까지 살펴본 바와 같이 Horn(1965)이 처음에 제안했던 평행분석 절차가 안고 있는 여러 이론적 제한점에 대해 그동안 다양한 문제 제기가 있어 왔고 여러 측면에서 이를 개선하기 위한 수정 절차가 제안되었다. 이 중 무선 자료를 정규분포에서 추출하여 고윳값을 얻는 것에 대해서는 별다른 문제가 없는 것으로 확인되었다. 무선 고윳값 표집분포의 평균을 사용하는 것은 모의실험에서 발견된 차이가 크지는 않았지만 1종 오류의 적절한 통제라는

이론적 측면에서 볼 때 95백분위수를 사용하는 것이 더 바람직하다고 할 수 있다. 반면 평행분석의 대상이 되는 행렬로 상관행렬을 사용하는 것과 축소상관행렬을 사용하는 것은 비교 조건에 따라 상이한 결과가 얻어지는 것으로 보이며 일반적인 결론에 이르기 위해서는 추가적인 연구가 필요하다. 둘 이상의 요인에 대해서 요인의 개수에 따라 순차적으로 모집단 상관행렬을 추정하여 무선 자료를 추출하는 방식의 수정 절차는 이러한 절차의 복잡성을 감수할 만한 이점이 명확히 확인되지 않았다. 그러나 둘 이상의 요인의 개수를 평행분석이 정확히 추정하지 못할 수 있다는 점에 대해서는 연구자들의 주의가 필요하다.

평행분석의 정확성에 영향을 미치는 요인

평행분석은 요인수를 결정하는 절차 중 가장 우수한 절차 중 하나이지만 평행분석 결과의 타당성은 이 방법의 정확성에 영향을 줄 수 있는 다양한 조건들을 고려하여 평가하여야 한다. 특히 요인이 없거나 하나인 모형에 대해서는 이론적으로나 경험적으로 평행분석의 타당성을 지지하는 근거들이 비교적 명확하나 요인이 여럿인 모형에 대해서는 평행분석의 타당성의 근거가 명확하지 않다. 따라서 요인이 둘 이상인 요인모형에서 평행분석의 요인수 추정의 정확성이 이러한 조건들에 따라 어떻게 달라지는지를 파악하는 것은 매우 중요하다.

평행분석의 수행에 영향을 미칠 수 있는 조건들을 앞서 논의했던 고윳값 및 평행분석의 특징과 관련하여 살펴볼 수 있다. 먼저 평행분석의 정확성은 각 요인의 고윳값(λ_i)의 고윳값의 크기에 의해 영향을 받는다. 요인의 고

웃값이 크면 관측 상관행렬의 고웃값과 무선 상관행렬의 고웃값의 차이가 커지기 때문에 평행분석이 실제 요인을 탐지할 수 있는 확률(검정력) 또한 커진다. 요인의 고웃값의 크기는 요인이 변수와 갖는 요인부하량의 제곱합으로 결정된다. 따라서 요인에 대한 각 변수의 요인부하량이 높을수록, 요인과 관련을 갖는 변수가 많을수록 해당 요인의 고웃값은 커질 것이고 평행분석의 정확성도 높아질 것이다. 특히 요인들이 서로 다른 크기의 고웃값을 가질 때는 이 중 이 값이 가장 작은 요인의 고웃값의 크기가 중요할 것이다. 이는 이 요인에 대응하는 상관행렬의 고웃값이 무선 고웃값과 갖는 차이가 가장 작기 때문에 탐지될 가능성도 가장 낮고 따라서 이 요인의 탐지 여부가 요인수 추정의 정확성을 결정하기 때문이다.

평행분석의 정확성에 영향을 주는 두 번째 요소는 요인들 사이의 상관의 크기이다. 예를 들어 고웃값의 크기가 동일한 두 요인의 상관이 커지면 첫 번째 고웃값과 두 번째 고웃값의 합은 일정하지만 두 고웃값의 차이는 커지고 두 번째 고웃값은 작아진다. 이는 두 변수의 상관행렬의 고웃값의 합(2)은 항상 동일하지만 이 변수 사이의 상관이 클수록 첫 번째 고웃값과 두 번째 고웃값의 차이가 커지는 것과 같은 이치이다. 이처럼 요인상관이 커 두 번째 고웃값이 작아지면 두 번째 요인이 탐지될 가능성은 낮아진다. 이러한 특성은 요인이 셋 이상인 경우에도 적용된다. 따라서 요인상관이 높을수록 평행분석의 정확성은 낮아질 것이다.

셋째로 평행분석의 정확성은 요인의 개수가 많을수록 낮아질 것이다. 평행분석의 기본적 논리는 요인이 없는 모형과 요인이 하나인 모

형의 올바른 채택과 기각에 맞추어져 있다. 그러나 요인이 둘 이상인 모형에 대해서는 표본 고웃값의 최소제곱 편향의 차이로 인해 정확한 비교값을 제시해 주지 못한다(Green, Levy, Thompson, Lu, & Lo, 2012; Turner, 1998). 또한 모형의 요인의 개수가 많으면 평행분석이 검정해야 하는 판단의 수가 증가하기 때문에 요인의 개수가 충분함에도 영가설이 기각되는 1종 오류와 요인의 개수가 더 필요함에도 영가설이 기각되지 않는 2종 오류의 가능성도 더 높아진다. 따라서 요인의 개수가 많을수록 평행분석의 정확성은 낮아질 가능성이 높다.

마지막으로 평행분석의 정확성은 표본크기에 의해 영향을 받는다. 표본크기의 증가는 무선 표본의 고웃값과 관측 표본의 고웃값 각각에 대해 최소제곱 편향과 표집오차의 표준편차(즉, 표준오차)를 줄이는 역할을 한다. 이는 실제 고웃값과 무선 고웃값의 차이에 대한 추정 오차를 줄이고 표본 분석 결과의 신뢰도를 높인다. 결과적으로 표본크기가 커질수록 평행분석의 정확성은 높아져야 한다.

모의실험: 평행분석의 추정 정확성

지금까지 살펴본 바와 같이 평행분석은 요인의 개수를 추정할 때 상대적으로 가장 믿고 사용할 수 있는 절차 중의 하나이지만 아직 이론적 근거가 명확하지 않은 부분이 있고 요인의 구조나 자료의 특성 등에 따라 추정의 정확성이 달라질 수 있다. 따라서 연구자들은 평행분석이 제시해 주는 요인의 개수가 얼마나 타당한지를 정확성에 영향을 줄 수 있는 여러 조건을 감안하여 평가하여야 한다. 그러

나 그동안 평행분석의 수행을 평가했던 연구들은 주로 다른 절차들과의 비교에 초점을 두어 왔고 특히 평행분석이 우수한 수행을 보이는 조건 하에서 이루어졌기 때문에 수행이 저조할 수 있는 조건들에 대한 포괄적인 탐색에는 한계가 있었다. 결과적으로 어떤 조건에서 평행분석의 결과를 신뢰할 수 있는지에 대해 연구자들이 실질적으로 참고할 수 있는 마땅한 지침이 부족한 실정이다. Crawford 등(2010)이 이에 대한 부분적인 정보를 제공하고 있지만 이 연구에서 검토된 조건들은 일반적인 지침을 제공하기에는 매우 제한적이다. 따라서 연구자들이 참고할 수 있는 실질적인 지침을 제공하기 위해서는 다양한 조건들을 포괄적으로 포함하는 모의실험의 결과가 요구된다.

본 연구는 요인수 추정의 정확성에 영향을 줄 수 있는 여러 조건들에 따라 평행분석의 요인수 추정 정확성이 어떻게 달라지는지 확인하고, 연구자들이 평행분석의 결과를 평가하고 설계하는 데 참고할 수 있는 지침을 제공하기 위하여 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한 모의실험을 실시하였다. 평행분석 절차의 타당성에 대한 그간의 논의와 연구 결과들을 반영하여, 본 연구에서는 무선 정규분포에서 추출된 표본들의 고윳값 표집분포의 95백분위수를 평행분석의 비교 기준값으로 삼았다.⁶⁾ 반면 평행분석의 분석 행렬을 상관행렬로 사용하는 것과 축소상관행렬로 사용하는 것의

타당성에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다는 점을 고려하여 동일한 분석 자료에 대해 PA-PCA와 PA-PAF를 이용한 분석을 실시하여 그 결과를 비교하고자 하였다. 또한 평행분석의 추정 정확성이 여러 조건들의 조합에 따라 어떤 차이를 보이는지에 대해 포괄적인 조망을 할 수 있도록 추정 정확성에 영향을 줄 수 있는 조건들의 모수를 가급적 다양한 수준으로 구성하였다.

방 법

설계 및 자료생성

평행분석의 추정 정확성에 영향을 줄 수 있는 요인으로 본 연구의 설계에 포함된 조건들은 다음과 같다.

1. 표본크기(N): 표본의 크기는 100부터 1000까지 100의 간격으로 늘려 10개의 수준을 갖도록 구성하였다.
2. 요인 개수(F): 요인의 개수는 2개부터 8개까지 총 7개 수준으로 구성하였다. 본 연구에서는 요인이 하나인 모형에 대해서는 관심 사항이 아니었기 때문에 조건에서 제외하였다.⁷⁾
3. 요인당 변수의 개수(K): 요인당 변수의 개수는 4개부터 8개까지 총 5개의 수준으로 구성하였다. 한 변수는 하나의 요인에만 부하되고 나머지 요인과의 요인부하량은 0이 되도록 설정하였다.

6) Crawford 등(2010)의 연구 결과에서는 조건에 따라 평균을 기준값으로 삼는 것이 95백분위수를 기준으로 삼는 것보다 더 높은 정확률을 보이기도 하였다. 그러나 본 연구에서는 두 기준이 경험적으로 큰 차이를 보이지 않고, 95백분위수의 사용이 이론적으로 더 합당하며, 분석의 결과를 가급적 명료하게 단순화하기 위하여 95백분위수의 기준만을 사용하였다.

7) Crawford 등(2010)에 의하면 요인이 하나인 경우 표본크기가 작고($n=100$) 요인부하량이 낮은($\lambda=.3$) 경우를 제외하고는 평행분석의 정확성이 매우 높았다.

4. 요인상관(ϕ): 요인의 상관은 .0부터 .6까지 .1씩 늘려 모두 7개의 수준을 갖도록 구성하였다.

5. 요인부하량(λ): 요인부하량은 .4에서 .7까지 .1의 간격으로 늘려 모두 4개의 수준을 갖도록 구성하였다. 모든 요인의 모든 요인부하량은 동일하게 설정하였다.

6. 약한 요인의 포함 여부(W): 고윳값이 가장 작은 요인이 정확성에 미치는 영향을 확인하기 위하여 요인 중 하나를 약한 요인으로 대체한 조건과 그렇지 않은 조건을 구성하였다. 약한 요인의 요인부하량은 .3으로 대체되었다. 약한 요인이 포함되는 조건에서는 실제 요인에 대응하는 F번째 고윳값이 낮아진다.

결과적으로 집단간 요인은 $N \times F \times K \times \phi \times \lambda \times W$ 의 6개로, 전체 조건의 수는 $10 \times 7 \times 5 \times 7 \times 4 \times 2 = 19,600$ 이었다.

각 조건에서 다음 절차에 따라 모집단 상관행렬을 구성하였다. 먼저 각 조건의 모수에 따라 행렬 Λ 와 Φ 를 설정한 후 이들을 이용하여 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 를 계산하였다. 이어서 행렬 $\Lambda\Phi\Lambda'$ 의 대각을 1로 대체하여 각 조건에 대한 모집단 상관행렬(R)을 얻었다. 총 변수의 개수는 $F \times K$ (요인수 \times 요인당 변수의 개수)가 된다. 다음으로 다변량 정규분포 $N(\mathbf{0}, R)$ 를 따르는 모집단에서 N개의 행과 $F \times K$ 개의 열을 갖는 분석표본 X 를 100개씩 추출하였다. 따라서 분석표본 X 의 총 개수는 1,960,000이었다.

평행분석

각각의 X 에 대해 상관행렬(R)과 SMC가 대각에 오는 축소상관행렬($R - \hat{U}$)을 구하고 각 행렬에 대해 평행분석이 수행되었다. 상관행렬

에 대해서는 PA-PCA가, 축소상관행렬에 대해서는 PA-PAF가 수행되었다(집단내 요인: M). PA-PCA에서는 표준정규분포를 따르는 모집단에서 N개의 행과 $F \times K$ 개의 열을 갖는 무선 자료를 추출하여 이 무선 상관행렬의 고윳값을 구하였다. PA-PAF에서는 이 무선 상관행렬의 SMC를 무선 상관행렬의 대각에 넣어 무선 축소상관행렬을 구성하고 이 행렬의 고윳값을 구하였다. 이 과정을 100번 씩 반복한 후 각 절차에서 고윳값의 표집분포를 얻고 작은 값부터 크기 순서로 나열했을 때 95번째의 값을 기각값으로 삼았다.

각 조건의 100개의 분석 표본에 대해 PA-PCA와 PA-PAF로 추정된 요인의 개수가 실제 요인의 개수와 동일하게 얻어진 표본의 개수를 100으로 나누어 각 조건의 정확률을 얻었다. 이렇게 계산된 정확률이 조건에 따라 어떤 차이를 나타내는지를 분산분석과 도표를 이용하여 분석하였다. 모의실험 및 평행분석 결과의 분석에는 R 3.3.3(R Core Team, 2017)이 사용되었다.

결 과

각 조건에 따른 요인수 추정의 정확률의 차이를 효과적으로 검토하기 위해 다음의 분석 절차를 따랐다. 먼저 정확률에 대한 각 조건과 이들의 상호작용의 효과크기를 비교하기 위하여 6개의 집단간 요인($N \times F \times K \times \phi \times \lambda \times W$)과 하나의 집단내 요인(M)을 갖는 분산분석(ANOVA)을 실시하였다. 분석에 앞서 정규성과 등분산성을 향상시키기 위해 정확률은 아크사인-제곱근으로 변환하였다(Cochran, 1940).⁸⁾

8) 정확률이 1.0인 조건들로 인해 아크사인-제곱근

효과크기의 추정량으로는 효과 간 비교가 용이한 준부분 에타제곱(η^2 , semipartial eta-squared)이 사용되었다.⁹⁾ 에타제곱은 .14 이상이면 큰 효과, .06 이상이면 중간 효과, .01 이상이면 작은 효과로 해석할 수 있으며(Cohen, 1988, pp. 285-287), 여기에서는 효과적인 요약 을 위해 중간 크기 이상의 효과를 중심으로 기술하되 작은 크기 이상의 효과도 모두 보고하였다.

표본크기, 요인상관, 약한 요인의 영향 및 추정방법의 차이

가장 큰 효과크기를 보인 네 개의 주효과는 표본크기(N: $\eta^2 = .275$), 요인상관(ϕ : $\eta^2 = .229$), 약한 요인의 유무(W: $\eta^2 = .128$)와 추정방법(M: $\eta^2 = .122$)이었다. 표본크기가 클수록, 요인상관이 낮을수록, 그리고 약한 요인이 없을 때 정확률이 더 높았으며 평균적으로 PA-PAF(78.5%)가 PA-PCA(69.7%)보다 더 높은 정확률을 보였다. 그러나 이 네 요인은 서로 복잡한 상호작용 효과를 보였다. 네 요인의 사원 상호작용($N \times \phi \times W \times M$)의 효과크기(η^2)는

변환보다 더 바람직한 방법으로 간주되는 로짓 변환이나 로짓 혼합모형(Jaeger, 2008)이 적용되지 않았다.

9) 에타제곱은 R^2 과 마찬가지로 전체 변산 중에 해당 요인에 의해 설명되는 비율로 해석된다. 본 연구의 설계는 집단간 요인과 집단내 요인이 포함된 혼합설계이기 때문에 Maxwell과 Delaney (2004, p. 598)의 권고를 따라 집단간 요인과 이들 간의 상호작용의 변산에 대해서와 집단내 요인(추정방법)과 이를 포함한 상호작용의 변산에 대해 각각 계산되었다. 효과크기에 대한 불편추정량으로서 오메가제곱(ω^2)이 사용될 수 있지만 분석의 목적이 모집단 효과크기의 추정이 아닌 효과크기의 비교이므로 상대적 비교에 용이한 에타제곱이 사용되었다.

.035로 전체 요인들의 사원 이상의 상호작용 중 가장 큰 값을 보였다. 또한 이 요인들 사이에는 삼원 상호작용 중 가장 큰 효과크기를 보인 표본크기, 요인상관 및 추정방법의 상호작용($N \times \phi \times M$: $\eta^2 = .040$)을 포함하여 표본크기, 요인상관 및 약한 요인($N \times \phi \times W$: $\eta^2 = .015$)과 요인상관, 약한 요인 및 추정방법($\phi \times W \times M$: $\eta^2 = .011$)의 삼원 상호작용도 확인되었다. 전체 이원 상호작용 중에서는 요인상관과 추정방법의 상호작용의 효과($\phi \times M$: $\eta^2 = .317$)가 가장 컸으며 이외에도 이 네 변수 사이에는 약한 요인과 추정방법($W \times M$: $\eta^2 = .022$), 요인상관과 약한 요인($\phi \times W$: $\eta^2 = .017$), 그리고 표본크기와 약한 요인($N \times W$: $\eta^2 = .013$)의 이원 상호작용이 확인되었다.

이 네 요인들의 주효과와 상호작용효과와의 형태를 구체적으로 확인하기 위하여 각 조건에 따른 정확률을 그림 3에 도표로 제시하였다. 그림에서 보듯이 PA-PCA와 PA-PAF 모두 표본크기가 증가할수록 정확률이 높게 나타났으며 이는 약한 요인이 포함된 경우 더욱 두드러졌다. 또한 표본크기의 효과는 요인상관의 크기에 따라 다르게 나타났는데 이러한 경향은 PA-PAF보다 PA-PCA에서 더욱 두드러졌다.

약한 요인이 없는 조건에서 PA-PCA는 요인이 서로 독립적일 때 표본크기 300이상에서 95% 이상의 정확률을 보였다(그림 3의 왼편상단). 그러나 요인상관이 증가할수록 정확률이 급격히 낮아져 요인상관의 크기가 .4인 경우에는 표본크기가 500인 조건에서도 정확률이 90%를 밑돌았으며 요인상관이 .5일 때에는 약 75%, $\phi = .6$ 일 때에는 약 50%의 정확률을 보였다. 반면 PA-PAF는 약한 요인이 없는 조건에서 요인이 서로 독립적일 때에는 표본크

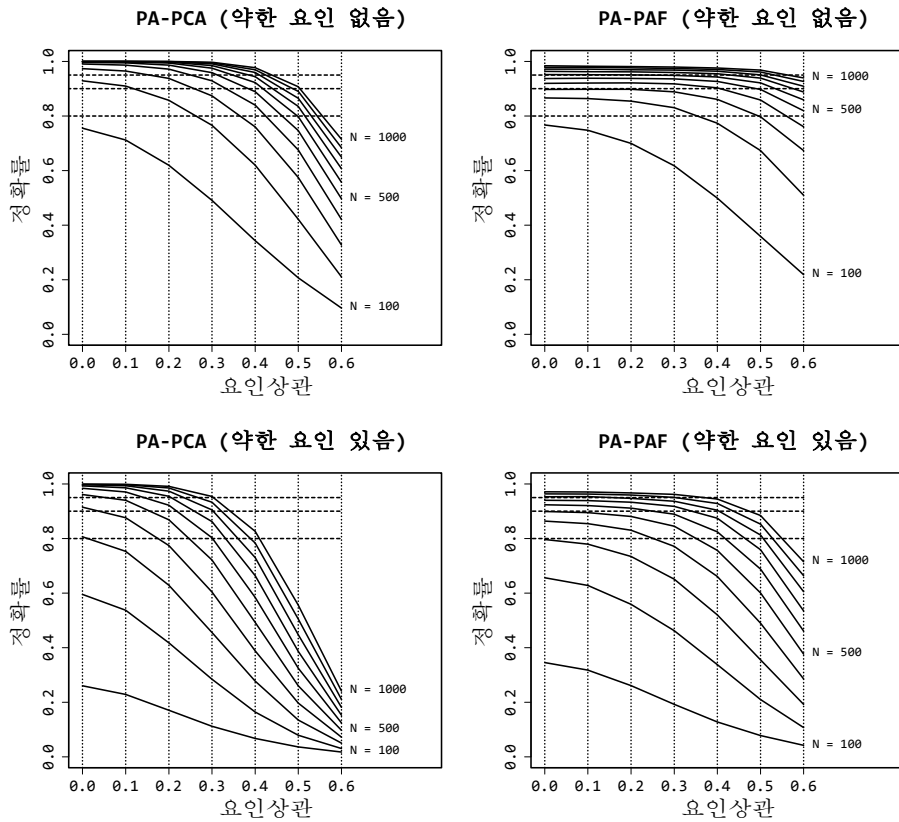


그림 3. 약한 요인이 있을 때와 없을 때 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률. 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

기 300에서 PA-PCA보다 낮은 정확률(90%)을 보였다(그림 3의 오른쪽 상단). 그러나 이 절차는 요인상관의 증가에 따른 정확률의 감소 정도가 PA-PCA에 비해 급격하지 않았으며 표본크기가 500인 조건에서는 요인상관이 .5일 때에도 약 90%의 정확률을 보였고 $\phi = .6$ 일 때에도 80% 이상의 정확률을 보였다.

약한 요인이 있는 조건에서는 90% 이상의 정확률을 얻기 위해 많은 표본크기를 필요로 하였으며 표본크기가 300이하인 경우는 전반적으로 낮은 정확률을 보였다. 요인상관이 없는 조건에서, PA-PCA는 표본크기 400 이상,

PA-PAF는 표본크기 500 이상일 때 90% 이상의 정확률을 보였다. 요인상관이 높은 조건에서는 표본크기가 큰 경우에도 정확률이 급격히 나빠졌는데 특히 PA-PCA는 표본크기가 500인 경우에도 요인상관이 .3인 조건에서 정확률이 75%에 미치지 못하였으며 심지어 표본크기가 1000인 경우에도 요인상관이 .5인 조건에서는 60% 미만, $\phi = .6$ 인 조건에서는 약 25%의 정확률을 보였다(그림 3의 왼쪽 하단). 같은 조건에서 PA-PAF는 표본크기가 500인 경우 요인상관이 .3일 때 약 85%, 요인상관이 .4일 때 75% 이상의 정확률을 보여 PA-PCA만큼

크지는 않았지만 표본크기가 큰 경우에도 요인상관의 증가가 정확률의 감소에 뚜렷한 영향을 미쳤다(그림 3의 오른쪽 하단).

90%이상의 정확률을 최소 기준으로 삼아 이상의 결과를 요약하면 다음과 같다. 약한 요인이 포함된 경우에는 평행분석의 결과를 그다지 신뢰할 수 없으며 600에서 700 이상의 매우 큰 표본이 가용한 경우 요인상관이 높지 않은 조건에 한해 제한적으로 사용될 수 있다. 요인상관이 높은 경우에는 두 절차 중 PA-PAF를 사용하는 것이 바람직하나 이때에도 결과를 크게 신뢰하기는 어렵다. 반면 약한 요인이 없는 경우에는 요인상관이 .3 이하인 조건에서 표본크기가 300에서 400이상일 때 PA-PCA를 사용하는 것이 바람직하며 요인상관이 좀 더 높은 조건에서는 표본크기가 400에서 500이상일 때 PA-PAF를 사용할 수 있다. 물론 이와 같은 결과는 네 요인 이외의 다른 요인들의 조건들을 고려하지 않은 것이며 이 조건들에 따라 상이한 결과를 보였다.

요인의 개수, 요인부하량의 크기, 요인당 변수의 개수의 영향

그림 3에서 확인한 표본크기, 요인상관, 약한 요인 및 추정방법에 따른 정확률의 차이는 요인부하량의 크기, 요인의 개수, 요인당 변수의 개수에 따라서도 세부적인 차이를 나타냈다. 먼저 이 세 요인의 주효과는 요인의 개수(F: $\eta^2 = .078$)가 많을수록, 요인부하량의 크기(λ : $\eta^2 = .076$)가 클수록, 그리고 요인당 변수의 개수(K: $\eta^2 = .027$)가 많을수록 정확률이 높다는 것을 보였다. 이 요인들이 포함된 이원 상호작용 중에는 요인부하량과 추정방법($\lambda \times M$: $\eta^2 = .054$), 요인당 변수의 개수와 추정방

법(K \times M: $\eta^2 = .048$), 요인부하량과 약한 요인($\lambda \times W$: $\eta^2 = .022$), 요인 개수와 추정방법(F \times M: $\eta^2 = .020$), 그리고 요인 개수와 요인상관(F \times ϕ : $\eta^2 = .015$)의 효과가 확인되었다. 삼원 상호작용으로는 요인부하량, 요인상관 및 추정방법($\lambda \times \phi \times M$: $\eta^2 = .024$), 요인 개수, 요인상관 및 추정방법(F \times $\phi \times M$: $\eta^2 = .022$)의 효과가 나타났으며 사원 상호작용으로는 요인부하량, 표본크기, 요인상관 및 추정방법($\lambda \times N \times \phi \times M$: $\eta^2 = .020$), 요인당 변수의 개수, 요인부하량, 요인상관 및 추정방법(K \times $\lambda \times \phi \times M$: $\eta^2 = .017$), 요인당 변수의 개수, 요인상관, 약한 요인 및 추정방법(K \times $\phi \times W \times M$: $\eta^2 = .014$)의 효과가 확인되었다. 이 요인들의 주효과와 상호작용효과의 형태를 구체적으로 확인하기 위하여 각 조건에 따른 정확률을 그림 4에서 그림 9에 도표로 제시하였다.

요인의 개수

그림 4와 그림 5는 약한 요인이 없는 조건과 있는 조건 각각에 대하여 표본크기와 요인상관에 따른 각 추정방법의 추정 정확률을 요인 개수 2, 4, 6, 8인 조건을 구분하여 나타낸 그림이다. 약한 요인이 없을 때 두 추정방법 모두 요인의 개수에 따라 정확률의 차이가 매우 크게 나타났다(그림 4). PA-PCA의 경우, 요인의 개수가 2인 조건에서는 표본크기가 200 이상이면 매우 높은 정확률을 보였으며 요인상관이 .4일 때에도 90% 이상의 정확률을 보였다. 그러나 요인의 개수가 증가할수록 표본크기가 작은 조건에서의 정확률이 낮았고 요인상관 증가에 따른 정확률의 하락폭이 급격하게 커졌다. 요인의 개수가 6 이상인 경우에는 요인상관이 .6일 때 200 이하의 표본크기의 정확률은 0에 가까웠으며 표본크기가 500

인 조건의 정확률도 40%를 넘지 않았다. PA-PAF의 경우에도 요인 개수가 2인 조건에서 높은 정확률을 보였으며 표본크기가 300 이상이면

요인상관이 .6인 경우에도 정확률이 90%를 넘었다. PA-PAF 역시 요인의 개수가 증가할수록 표본크기가 작은 조건에서 정확률이 낮아지고

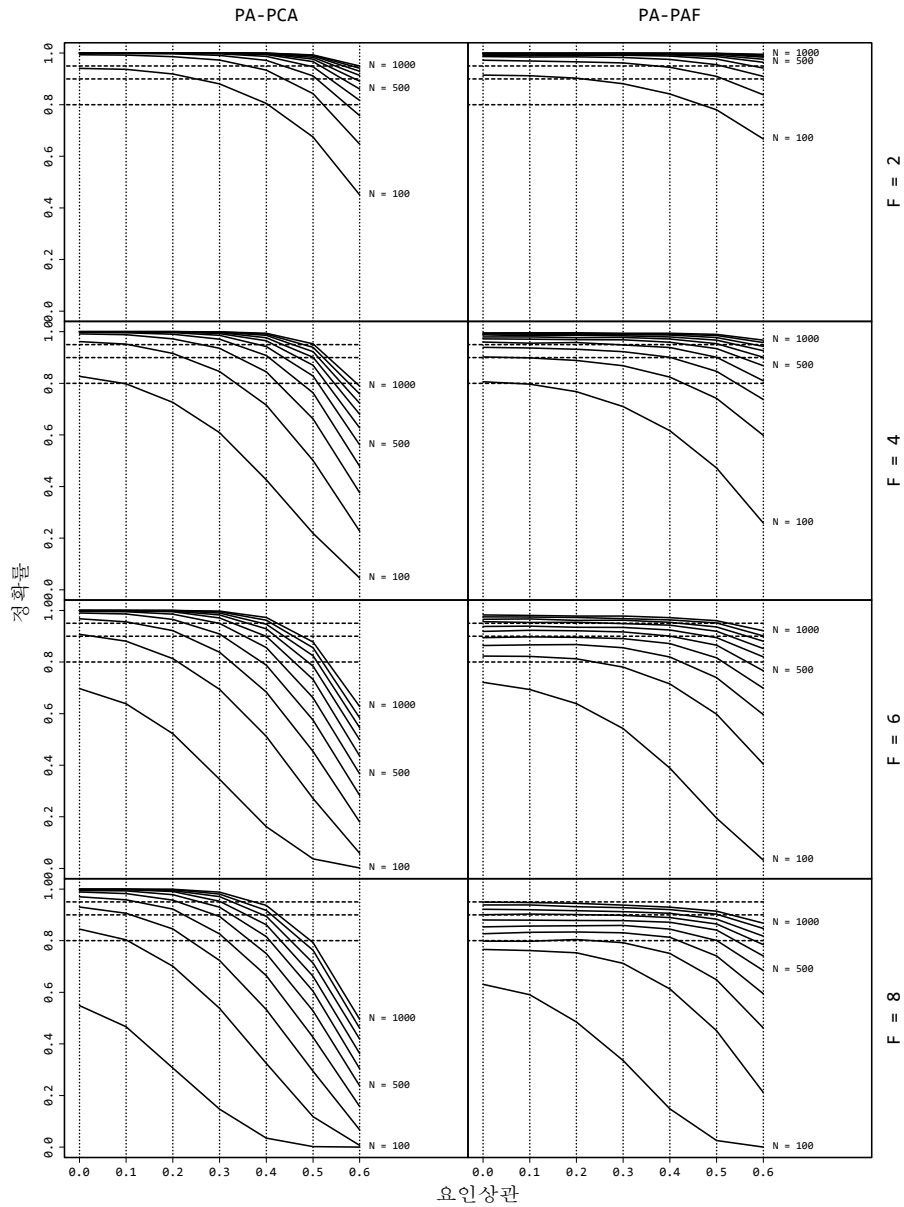


그림 4. 요인 개수(F) 2, 4, 6, 8의 조건에서 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 없는 조건). 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

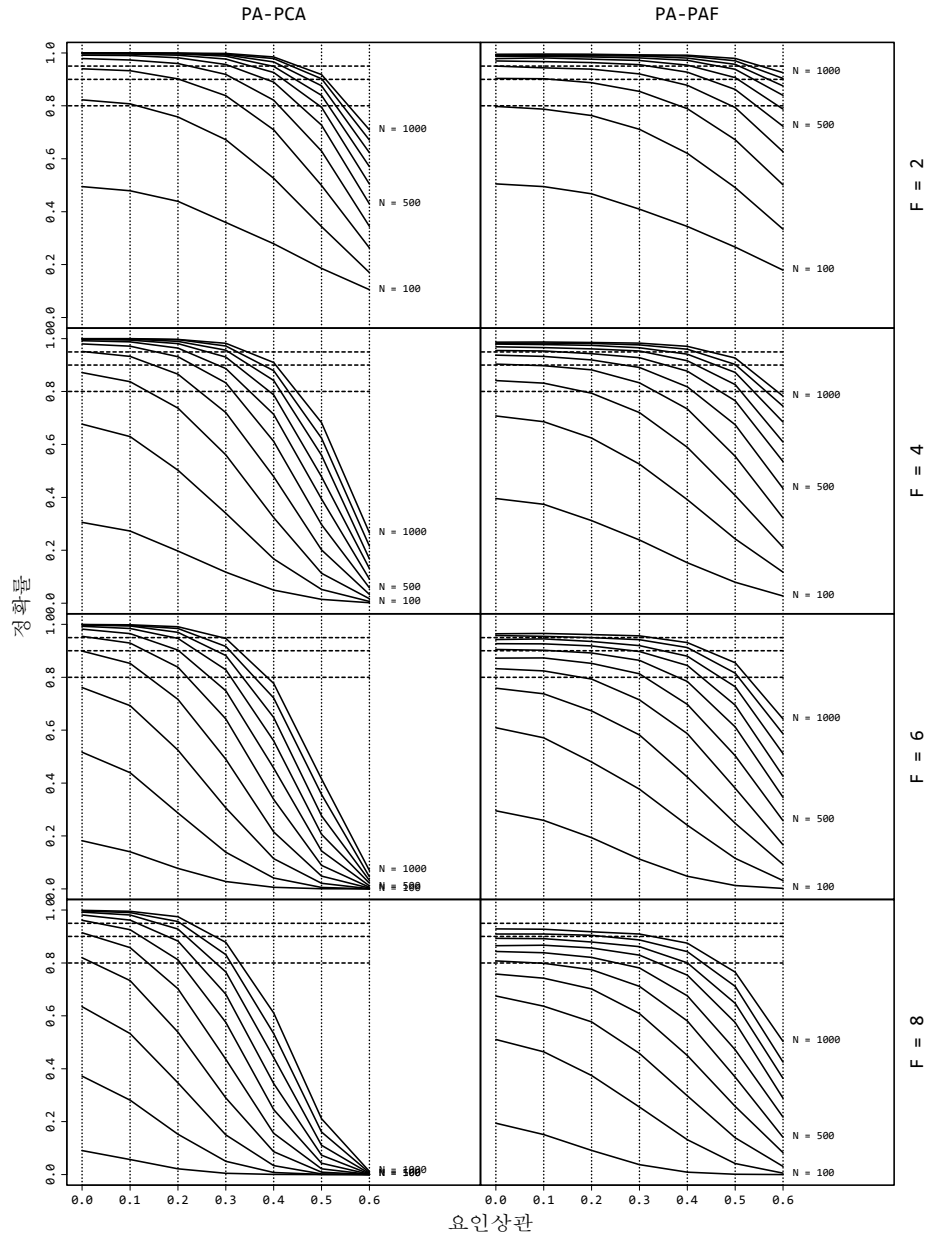


그림 5. 요인 개수(F) 2, 4, 6, 8의 조건에서 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 있는 조건). 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

요인상관 증가에 따른 정확률의 하락폭이 커졌으나 그 크기는 PA-PCA보다 작았다. 특히 표본크기가 큰 조건에서는 요인상관 증가에 따른 정확률의 하락폭이 크지 않았다.

약한 요인이 있을 때에는 요인의 개수에 따른 차이가 상대적으로 작았으나 정확률이 전반적으로 낮았으며 표본크기에 따른 차이가 크게 나타났다(그림 5). PA-PCA는 요인 개수가 2일 때에는 400 이상의 표본크기에서 상대적으로 정확률이 높았으나 이 경우에도 요인상관이 .3을 넘으면 정확률이 크게 낮아졌다. 요인의 개수가 많아질수록 요인상관의 증가에 따라 정확률이 급격히 낮아지는 경향은 더욱 뚜렷하였으며 요인이 6개 이상인 경우에는 표본크기가 1000인 조건에서도 요인상관이 높아짐에 따라 정확률이 거의 0에 수렴하였다. PA-PAF도 요인수가 2일 때 400 이상의 표본크기에서 높은 정확률을 보였다. 또한 요인의 개수가 많아질수록 전반적으로 정확률이 낮아지면서 표본크기의 영향을 더 크게 받았다. 그러나 요인상관 증가에 따른 정확률의 감소는 상대적으로 크지 않았다.

요인부하량의 크기

그림 6과 그림 7은 약한 요인이 없는 조건과 있는 조건 각각에 대하여 표본크기와 요인상관에 따른 각 추정방법의 추정 정확률을 요인부하량 크기를 구분하여 나타낸 그림이다. 약한 요인이 없는 조건에서 두 추정방법 모두 요인부하량의 크기에 따라 정확률에서 매우 뚜렷한 차이를 보였다(그림 6). PA-PCA는 요인부하량이 낮은 조건($\lambda = .4$ 또는 $.5$)에서 표본크기가 클 때나 작을 때나 요인상관의 차이에 따라 정확률의 차이가 크게 나타났는데 반해 요인부하량이 높은 조건($\lambda = .6$ 또는 $.7$)에서는 표본크기가 클 때(500 이상) 요인상관의 차이에 따라 정확률의 차이가 상대적으로 크지 않았다. PA-PAF는 요인부하량이 .4인 조건에서는 정확률이 전반적으로 낮았고 표본크기에

따라 큰 차이를 보였으며 요인부하량이 높을수록 정확률이 큰 폭으로 증가했다. 요인부하량이 .6 이상인 조건에서는 표본크기 300 이상에서 요인상관이 높을 때에도 매우 높은 정확률을 보였다.

약한 요인이 포함된 조건에서의 정확률은 전반적으로 낮았고 표본크기에 따른 차이가 컸으나, 약한 요인이 포함되지 않은 조건에서와는 달리 요인부하량의 크기에 따라서는 큰 차이를 보이지 않았다(그림 7). PA-PCA는 요인부하량의 크기에 따른 차이가 거의 없었으며 전체적으로 요인상관이 높을수록 정확률이 급격히 낮아지는 유사한 형태를 보였다. 요인상관이 .2 이하일 때 표본크기가 500에서 600 이상인 조건에서 90% 이상의 정확률을 보였지만 .3 이상의 요인상관에서는 표본크기가 큰 조건에서도 정확률이 급격히 감소하였다. PA-PAF는 요인부하량이 .4인 조건에서 모든 경우에 90% 이하의 정확률을 보였다. 요인부하량이 .5 이상인 조건에서는 요인부하량의 크기에 따라 정확률의 차이가 크지 않았으며 요인상관이 높을수록 정확률이 낮아지는 형태도 유사하였으나 PA-PCA에 비해 요인상관의 영향은 상대적으로 작았다.

약한 요인이 포함된 조건에서의 정확률이 이처럼 요인부하량의 크기에 따라 큰 차이를 보이지 않은 이유는 요인부하량의 크기에 의해 달라지는 요인의 고윳값의 크기가 정확률에 미치는 영향이 고윳값이 가장 작은 약한 요인에 의해 결정적으로 좌우되었기 때문으로 판단된다. 앞서 설명한 대로 고윳값이 가장 작은 요인이 평행분석에 의해 탐지될 가능성이 가장 낮으며 따라서 이 요인의 탐지 여부가 요인수 추정의 정확률에 결정적인 영향을 미친 것으로 보인다.

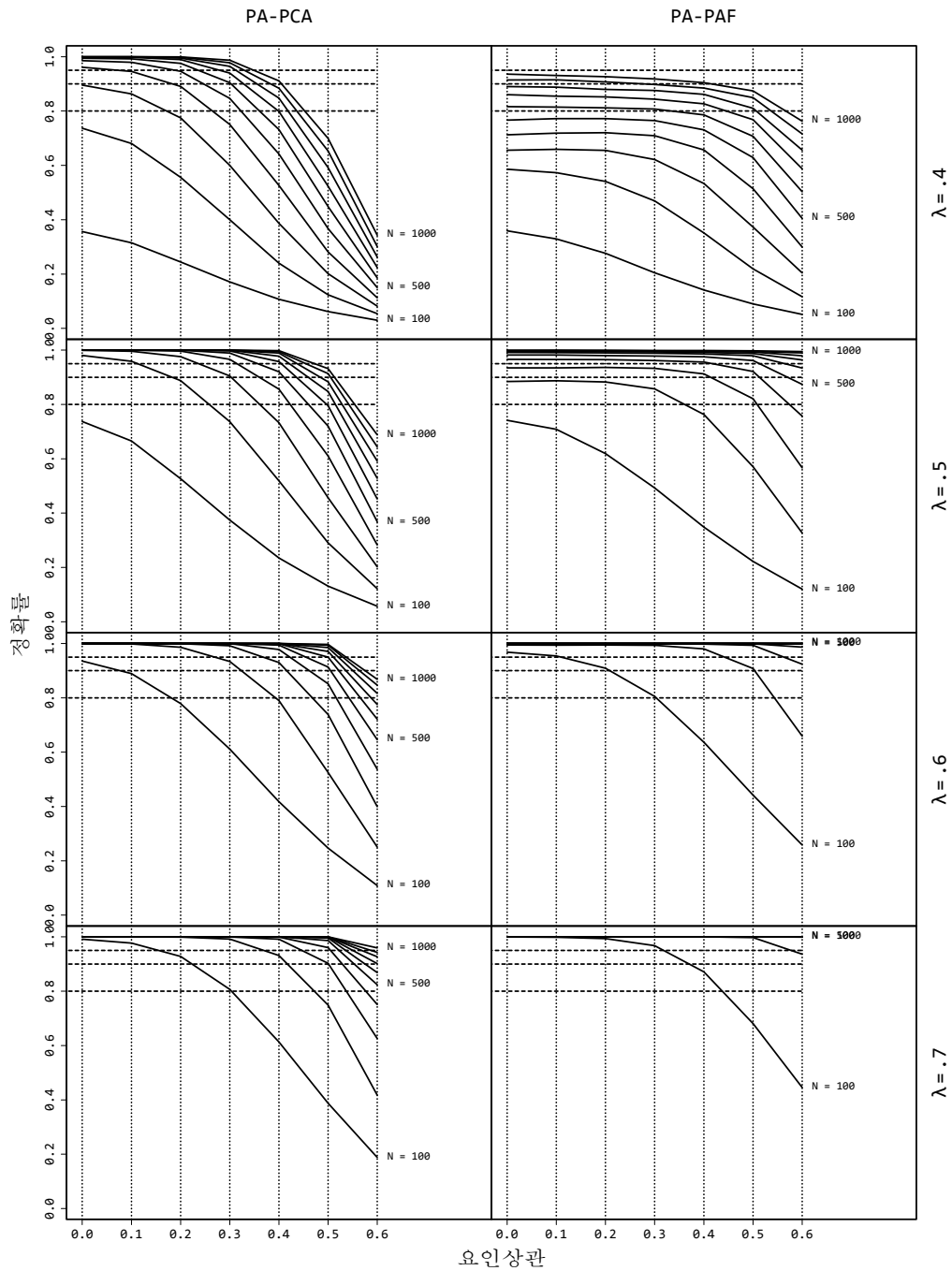


그림 6. 요인부하량 크기(λ)의 각 조건에서 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 없는 조건). 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

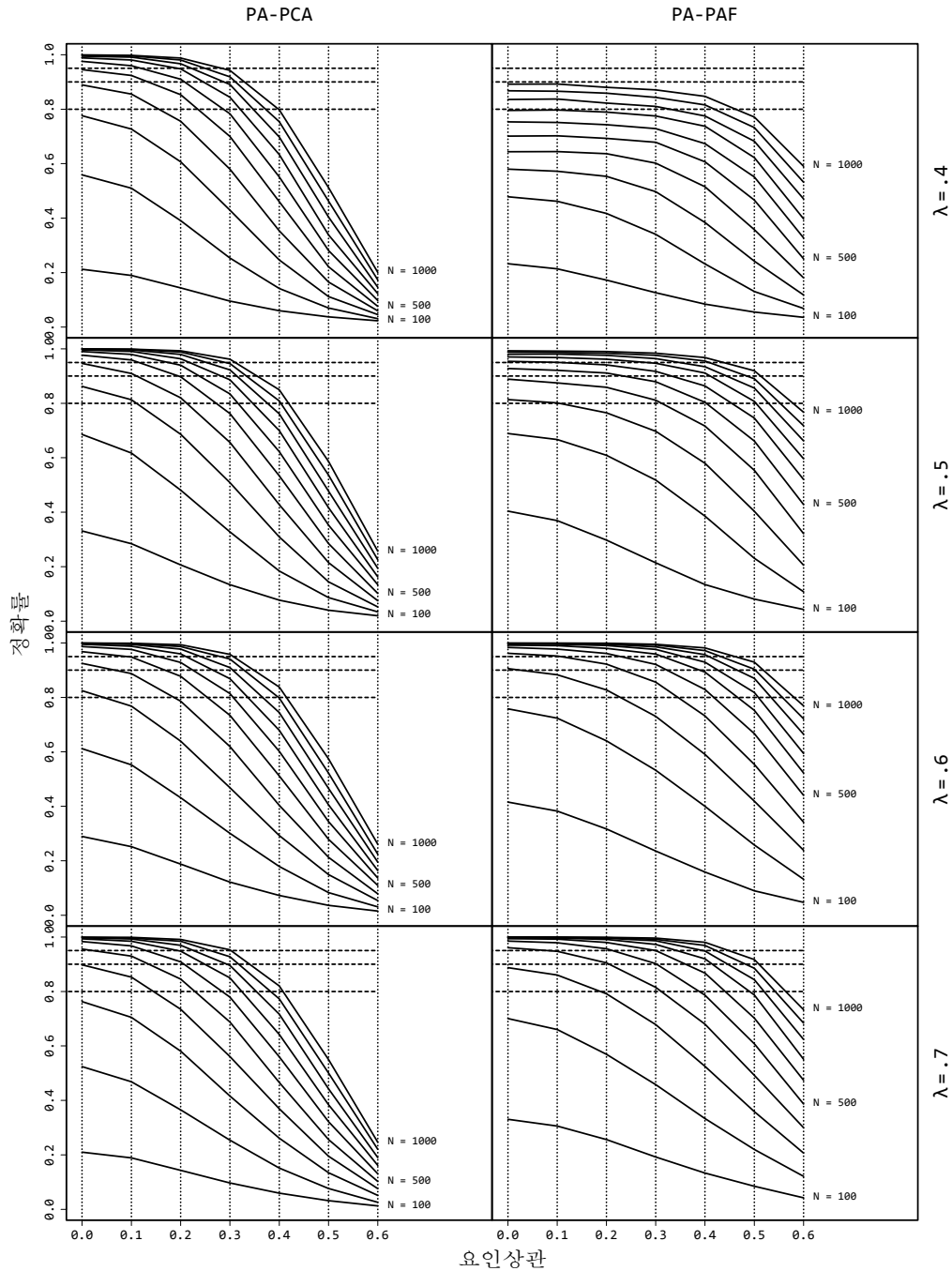


그림 7. 요인부하량 크기(λ)의 각 조건에서 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 있는 조건). 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

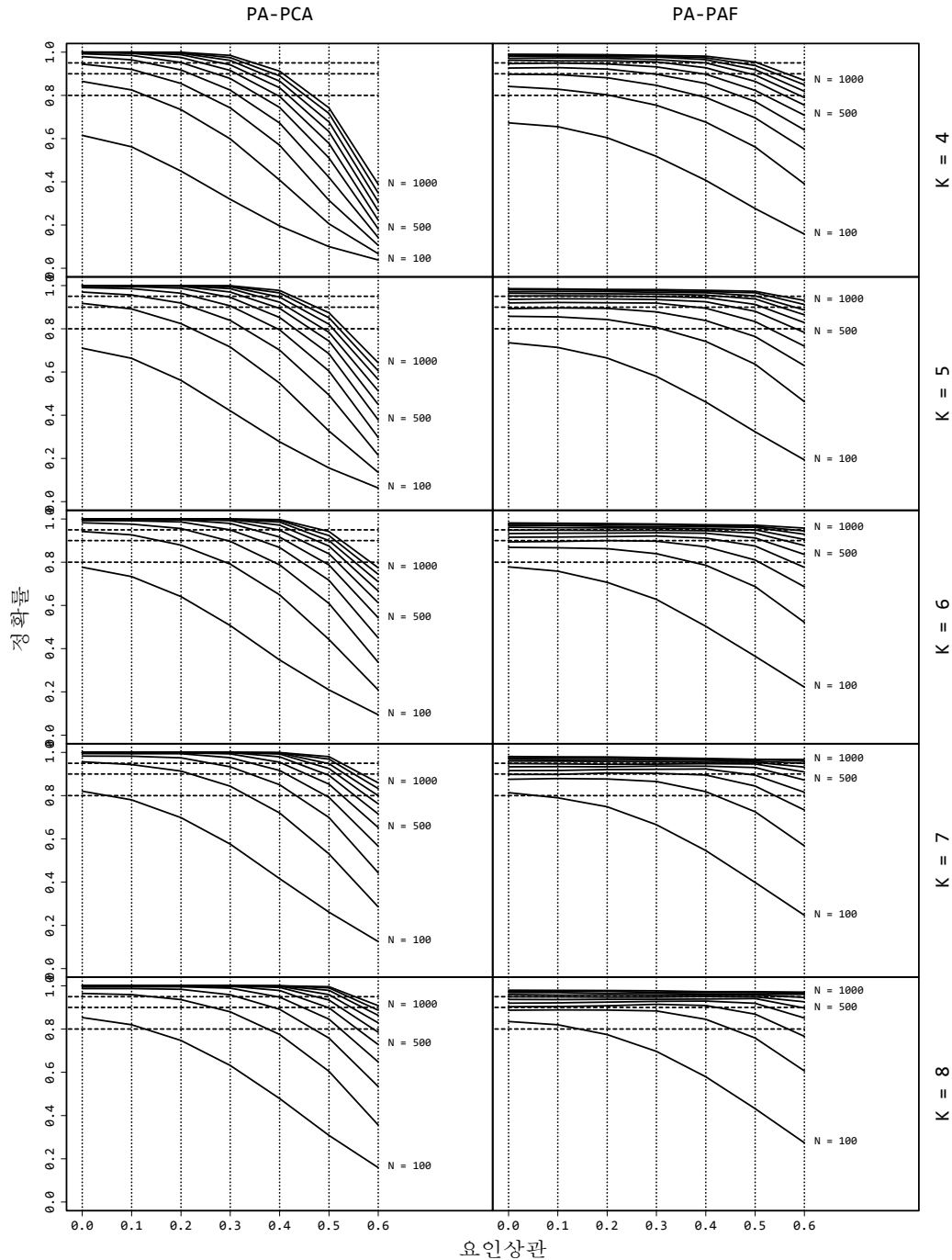


그림 8. 요인당 변수의 개수(K)의 각 조건에서 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 없는 조건). 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

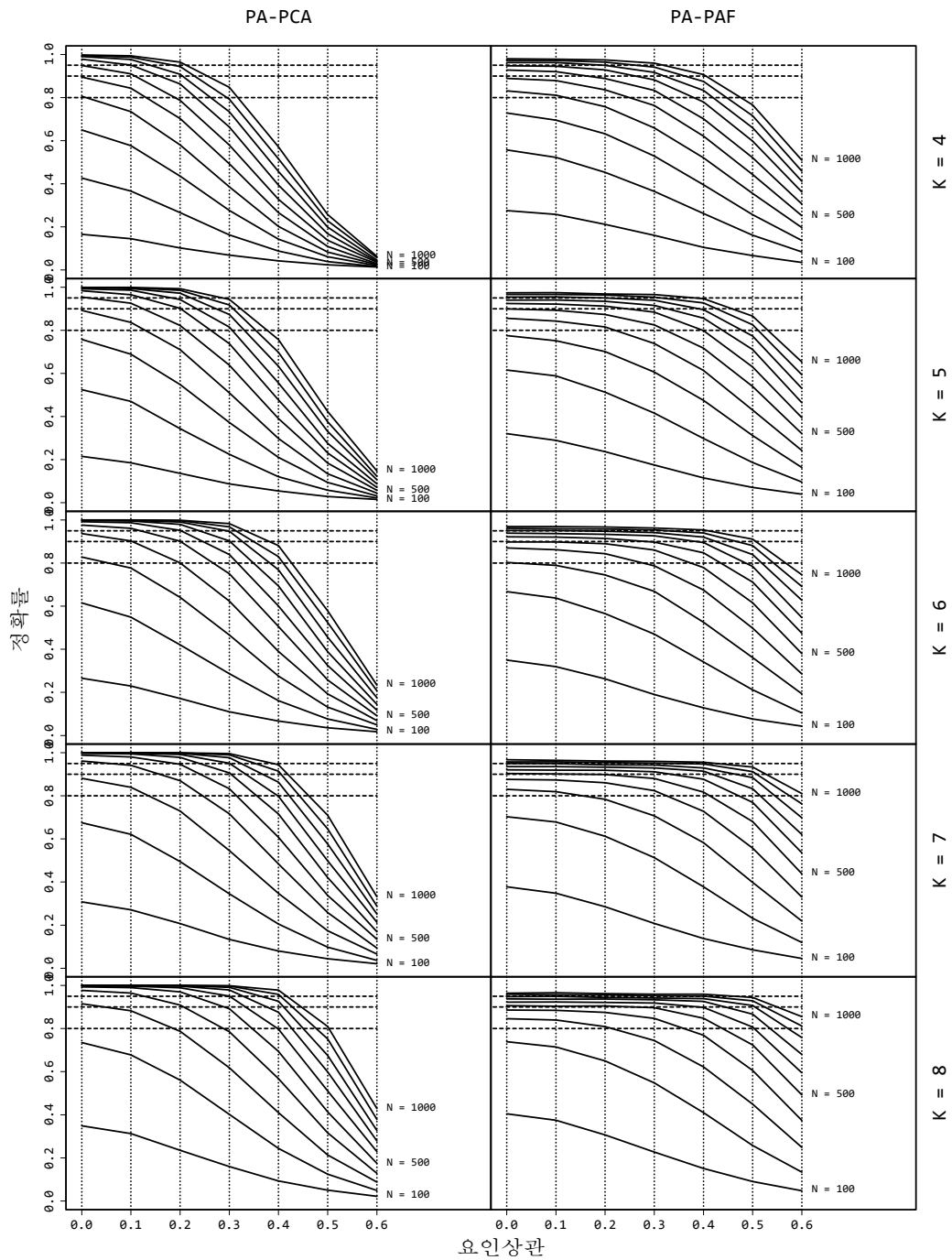


그림 9. 요인당 변수의 개수(K)의 각 조건에서 표본크기와 요인상관의 크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 있는 조건). 수평 방향의 점선은 각각 정확률 .80, .90, 및 .95를 나타냄.

요인당 변수의 개수

그림 8과 그림 9는 약한 요인이 없는 조건과 있는 조건 각각에 대하여 표본크기와 요인상관에 따른 각 추정방법의 추정 정확률을 요인당 변수의 개수를 구분하여 나타낸 그림이다. 약한 요인이 없을 때 두 추정방법 모두 요인당 변수의 개수가 많을수록 정확률이 높았다(그림 8). 그러나 그 차이는 요인의 개수나 요인부하량의 크기에 따른 차이보다는 상대적으로 작았다. PA-PCA의 경우, 요인당 변수의 개수가 6개 이상인 조건에서는 표본크기가 300 이상이면 요인상관이 .3 이하일 때 정확률이 90%를 넘었다. 변수의 개수가 적은 조건에서는 유사한 수준의 정확률을 위해서 400에서 500의 표본크기가 요구되었으며 요인상관의 증가에 따른 정확률의 하락폭도 더욱 컸다. PA-PAF 역시 유사한 결과를 보였으나 요인상관 증가에 따른 정확률의 하락폭은 상대적으로 작았다.

약한 요인이 있을 때에는 요인당 변수의 개수에 따른 차이가 상대적으로 작았으며 전반적으로 정확률이 낮았고 표본크기에 따른 차이는 크게 나타났다(그림 9). PA-PCA는 요인당 변수의 개수가 적을수록 요인상관의 증가에 따른 정확률의 급격한 감소 경향이 더욱 뚜렷하였다. 특히 변수가 5개 이하인 경우에는 매우 큰 표본에서도 요인상관이 증가함에 따라 정확률이 0에 가깝게 수렴하였다. PA-PAF에서도 요인당 변수의 개수가 적을수록 요인상관 증가에 따른 정확률의 감소 경향이 두드러졌지만 PA-PCA에 비해 요인상관에 의한 영향은 작았다.

결론

요인의 개수를 결정하는 문제는 탐색적 요인분석에서 여전히 가장 중요하면서도 까다로운 문제로 남아있다. 요인수의 결정에는 고유티값을 이용한 방법이 가장 널리 사용되며 그 중에서도 평행분석은 논리적 근거와 경험적 근거의 측면에서 가장 높은 타당성을 가지는 절차로 평가받는다. 그러나 평행분석의 타당성에 대해서도 아직 해결되지 않은 이론적 쟁점들이 남아 있으며 평행분석의 정확성을 낮추는 조건들과 그 이유들도 잘 알려져 있지 않다. 본 연구는 고유티값과 평행분석이 요인수의 추정에 사용될 수 있는 이론적 근거와 평행분석 절차가 안고 있는 이론적, 경험적 한계를 검토하였다. 또한 평행분석의 정확성에 영향을 줄 수 있는 다양한 요인들을 검토하였고 이 요인들이 조합된 다양한 조건에서 정확성이 어떻게 달라지는지를 확인하기 위해 모의실험을 실시하였다. 모의실험의 결과는 평행분석의 정확성이 다양한 요인에 의해 크게 영향을 받는다는 것을 보여주었으며 이 중 다수의 결과는 이전 연구들에서 크게 주목받지 않았던 것들이다. 모의실험의 주요 결과를 요약하면 다음과 같다.

먼저 평행분석의 정확성은 요인상관의 크기에 크게 영향을 받았다. 요인의 상관이 높을수록 평행분석의 정확성은 낮았는데 특히 상관행렬에 대한 평행분석(PA-PCA)은 요인상관의 영향을 크게 받았다. 반면 축소상관행렬에 대한 평행분석(PA-PAF)은 요인상관이 높은 경우에도 전반적으로 정확성의 하락이 크지 않았다. PA-PAF가 PA-PCA보다 요인상관에 덜 영향을 받는다는 것은 요인수 추정 절차로서 축소상관행렬에 대한 평행분석이 상관행렬에

대한 평행분석보다 이론적으로 더 타당한 근거를 갖는다는 점에서 주목할 만한 결과이다.

본 연구에서 주목할 또 다른 결과는 고윳값의 크기가 작은 약한 요인의 포함 여부가 평행분석의 정확성에 크게 영향을 주었다는 것이다. 평행분석의 정확성에 요인의 고윳값이 영향을 미친다는 것은 비교적 자명하다. 본 연구에 포함된 요인부하량의 크기와 요인당 변수의 개수는 요인의 고윳값을 결정하는 주요 변수이며 모의실험의 결과도 평행분석의 정확성이 요인부하량이 높을수록, 그리고 요인당 변수의 개수가 많을수록 높다는 것을 보였다. 그러나 약한 요인이 포함된 경우에는 요인부하량이 높고 요인당 변수의 개수가 많은 경우에도 평행분석의 정확성이 크게 떨어졌다. 이는 요인의 고윳값 중에서도 가장 작은 고윳값의 크기가 평행분석의 정확성에 결정적인 영향을 미친다는 것을 의미한다.

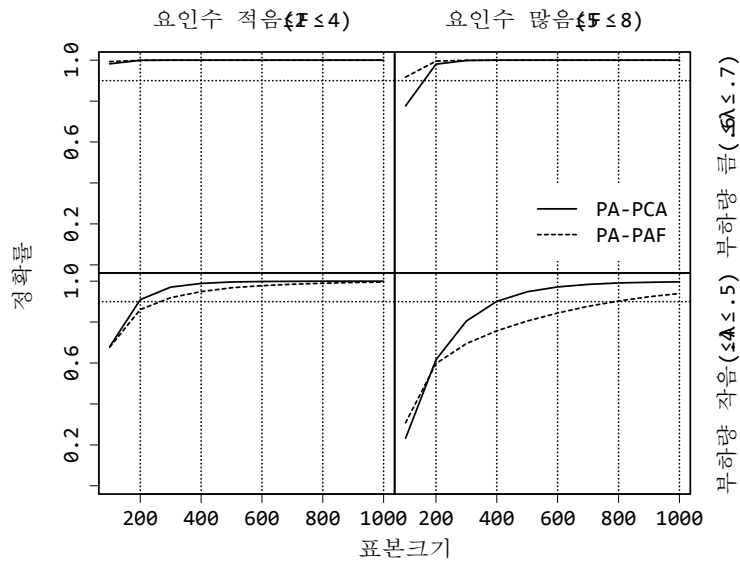
이와 관련하여 약한 요인이 없는 경우에는 요인당 변수의 개수보다 요인부하량의 크기가 정확률에 더 큰 영향을 주었다는 점을 기억해야 한다. 이것은 요인의 고윳값이 요인부하량의 제곱함으로 결정되기 때문에 변수의 개수의 증가는 가산적으로 영향을 미치지만 요인부하량의 증가는 제곱이 되어 영향을 미치기 때문이다. 요인부하량이 높을 때 PA-PCA보다 PA-PAF의 정확률이 더 크게 증가하였다는 점도 중요한 결과이다.

이전 연구에서 강조되지 않았지만 본 연구의 결과에서 드러난 또 다른 중요한 사실은 요인의 개수에 따라 평행분석의 정확성이 큰 차이를 보였다는 것이다. PA-PCA나 PA-PAF 모두 요인이 두 개인 조건에서는 전반적으로 매우 높은 정확률을 보였지만 요인의 개수가 늘어날수록 높은 정확률을 갖기 위해서 큰 표

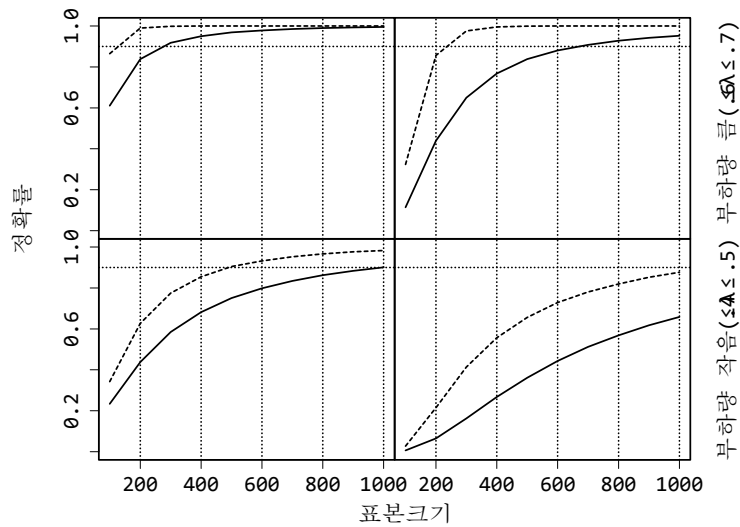
본크기가 요구되었으며 특히 요인의 개수가 많으면서 요인상관이 높은 경우 PA-PCA의 정확률은 매우 낮았다.

요인상관, 요인의 고윳값, 요인의 개수에 따른 평행분석의 정확성에서의 이와 같은 차이는 그간 평행분석의 수행에서 크게 강조되지 않았던 표본크기에 대한 중요성을 환기시켜 준다. 본 연구의 결과에서 나타났듯이 큰 표본크기는 평행분석의 추정 정확성을 확보하는데 중요한 요인이며 특히 평행분석의 수행이 좋지 않은 조건들에서 표본크기에 따른 정확성의 차이는 매우 크게 나타난다. 그간 탐색적 요인분석에서 요구되는 표본크기에 관한 연구들은 주로 요인부하량을 포함한 모수의 추정 정확성이나 모형에 대한 검정력의 측면에서 주로 이루어졌다(예, MacCallum, Browne, & Sugawara, 1996; MacCallum, Widaman, Zhang, & Hong, 1999). 그러나 모형의 모수 추정이나 모형에 대한 검정력은 모형이 올바르게 설정되었다는 것이 전제되었을 때의 문제이며 탐색적 요인분석에서는 요인 개수의 설정이 모형 설정의 핵심적 요소이다. 따라서 정확한 요인 개수 추정에 필요한 표본크기는 정확한 모수 추정과 높은 모형 검정력에 요구되는 표본크기보다 선결되어야 하는 필요조건이다. 평행분석을 이용하여 요인의 개수를 정확히 추정하는 데 필요한 표본크기를 요인모형의 특성이나 자료의 특성의 다양한 조건에 따라 판단하기 위해 연구자들은 본 연구의 결과를 참고할 수 있을 것이다. 본 연구의 결과를 각 조건에서 90% 이상의 정확률을 얻기 위해 평행분석에 요구되는 표본크기를 결정하는 데 참고할 수 있도록 다음과 같이 재구성하였다.

그림 10은 모의실험 결과 중 약한 요인이 없는 조건의 결과를 요약한 것이다. 그림 10(a)



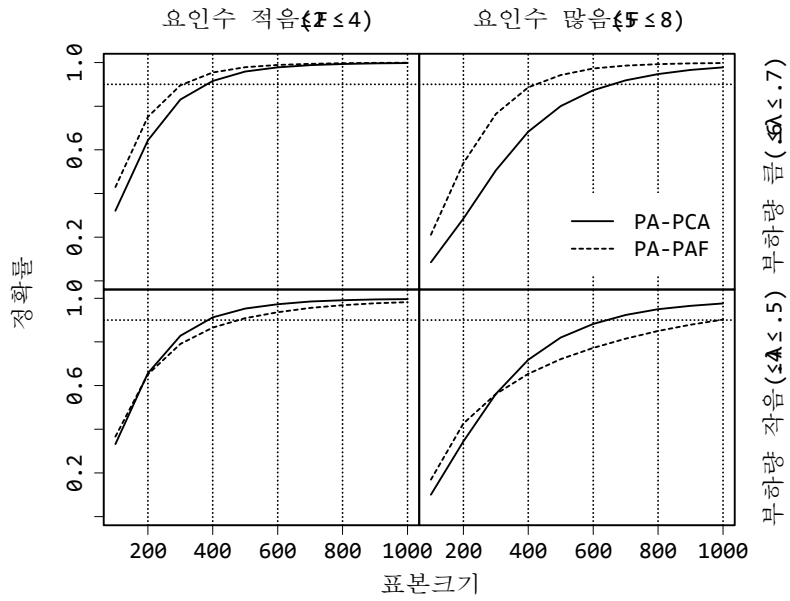
(a) 요인상관 낮음 ($0 \leq \phi \leq .3$)



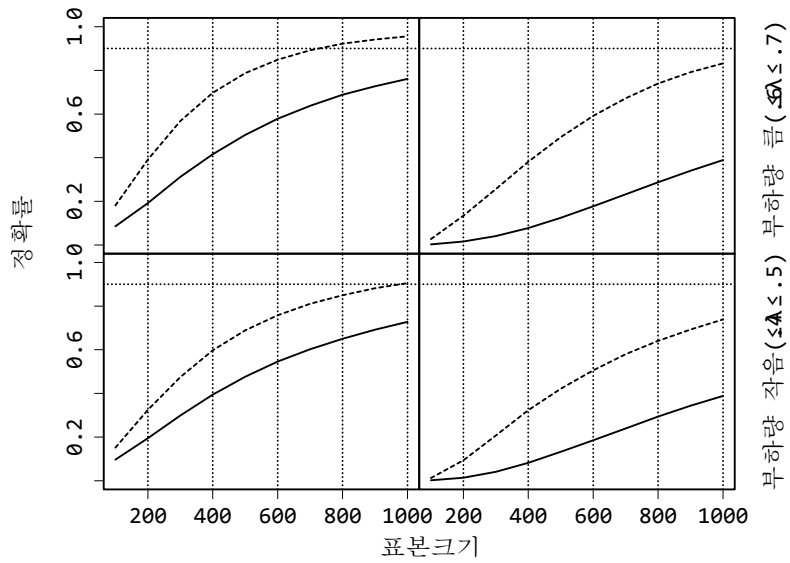
(b) 요인상관 높음 ($.4 \leq \phi \leq .6$)

그림 10. 요인 개수와 요인부하량 크기의 각 조건에서 표본크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인이 없는 조건). (a) 요인상관이 낮을 때. (b) 요인상관이 높을 때. 수평 방향의 점선은 .90을 나타냄.

는 요인상관이 낮은 조건($0 \leq \phi \leq .3$), 그림 10(b)는 요인상관이 높은 조건($.4 \leq \phi \leq .6$)의 결과이다. 각 패널의 좌측 열은 요인수가 적은 조건($2 \leq F \leq 4$), 우측 열은 요인수가 많은 조건($5 \leq F \leq 8$), 첫째 행은 요인부하량이 큰 조건($.6 \leq \lambda \leq .7$), 둘째 행은 요인부하량이 작은 조



(a) 요인상관 낮음 ($\leq \rho \leq .3$)



(b) 요인상관 높음 ($\leq \rho \leq .6$)

그림 11. 요인 개수와 요인부하량 크기의 각 조건에서 표본크기에 따른 PA-PCA와 PA-PAF의 요인수 추정 정확률(약한 요인 포함 조건). (a) 요인상관이 낮을 때, (b) 요인상관이 높을 때. 수평 방향의 점선은 .90을 나타냄.

건($4 \leq \lambda \leq 5$)이다. 각 도표의 가로 축은 표본 크기를 나타내며 수평 방향의 점선은 90%의 정확률을 표시한 것이다.

그림 10(a)에서 보듯이 요인상관이 낮은 조건에서 요인부하량이 클 때에는 PA-PCA와 PA-PAF의 정확률이 모두 매우 높다. PA-PAF는 요인 개수가 많은 경우에도 90% 이상의 정확률을 확보하는 데 100 이상의 표본크기로 충분하다. 요인부하량이 작은 경우에는 요인의 개수에 따라 정확률이 차이를 보인다. 요인의 개수가 적은 경우에는 비교적 정확률이 높고 90% 이상의 정확률을 위해 PA-PCA는 200, PA-PAF는 300 정도의 표본이 필요하다. 요인의 개수가 많은 경우에는 PA-PAF보다 PA-PCA의 사용이 바람직하며 90%의 정확률을 위해서는 적어도 400 정도의 표본크기가 요구된다.

반면 그림 10(b)에서 보듯이 요인상관이 높은 조건에서는 전체적인 정확률이 낮으며 PA-PCA보다는 PA-PAF의 사용이 바람직하다. 이 조건에서 요인부하량이 큰 경우, PA-PAF의 정확률이 90% 이상 되기 위해서는 요인의 개수가 적을 때는 100에서 150, 요인의 개수가 많을 때는 200에서 250 사이의 표본이 필요하다. 요인부하량이 낮을 때에는 PA-PAF도 정확률이 낮는데 요인의 개수가 적을 때에는 500 이상의 표본크기에서 90%의 정확률을 보이지만 요인의 개수가 많을 때에는 1000의 표본크기에도 정확률이 90%에 미치지 못한다. 따라서 요인상관이 높고, 요인부하량이 낮으면서 요인의 개수가 많은 경우에는 아무리 큰 표본을 사용한다 하더라도 평행분석이 제공하는 요인수의 추정값이 정확하지 않을 수 있다는 것을 유념해야 한다.

그림 11은 모의실험 결과 중 약한 요인이

포함된 조건의 결과를 요약한 것이다. 약한 요인이 포함된 조건에서는 전체적으로 정확률이 매우 낮았다. 그림 11(a)에서 보듯이 요인상관이 낮은 경우, 요인부하량이 클 때에는 PA-PAF가, 요인부하량이 작을 때에는 PA-PCA가 더 높은 정확률을 보였다. 요인부하량이 클 때에는 PA-PAF를 사용하되 90%의 정확률을 위해 요인의 개수가 적은 경우에는 300, 요인의 개수가 많은 경우에는 400 이상의 표본이 필요하다. 요인부하량이 작을 때에는 PA-PCA를 사용하되 요인의 개수가 적은 경우에는 400, 요인의 개수가 많은 경우에는 600에서 650 사이의 표본이 요구된다.

요인의 상관이 높은 경우에는 전체적으로 정확률이 매우 낮으며 90% 이상의 정확률을 위해서는 요인부하량이 크고 요인의 개수가 적은 경우에 한해 PA-PAF를 사용하되 약 750 이상의 표본이 필요하다. 따라서 약한 요인이 포함된 요인들이 서로 상관이 높을 것으로 예상되는 경우에는 매우 큰 표본이 사용되더라도 평행분석에 의해 추정된 요인 개수가 정확하지 않을 수 있다는 것을 주의해야 한다.

탐색적 요인분석은 심리학을 포함한 많은 연구 분야에서 여전히 매우 널리 사용되는 분석절차이다. 평행분석은 탐색적 요인분석에서 요인의 개수를 결정하기 위해 참고할 수 있는 중요한 정보를 제공한다는 점에서 실제 자료의 분석에 지금보다 더 널리 적용될 필요가 있다. 그러나 요인부하량이 낮은 요인이 포함되고, 요인상관이 높고, 요인의 개수가 많고, 표본크기가 작은 경우와 같이 이상적이지 않은 조건에서는 평행분석도 만족할 만한 수준의 정확률을 제공하지 못한다는 점을 주의해야 한다. 요인수를 결정할 때에는 평행분석이나 스크리 검사가 제공하는 분석 자료 고삐

의 특성에 관한 정보에만 의지해서는 안 되며 요인분석의 결과가 제공하는 다양한 정보(예, 모형의 적합도, 구조적 요소, 요인에 대한 내용적 이해와의 일치 여부)를 종합적으로 함께 고려해야 한다는 것을 잊지 말아야 한다.

참고문헌

- 이순목, 윤창영, 이민형, 정선호 (2016). 탐색적 요인분석: 어떻게 달라지나? 한국심리학회지: 일반, 35(1), 217-255.
- 장승민 (2015). 리커트 척도개발을 위한 탐색적 요인분석의 활용, 한국심리학회지: 임상, 34(4), 1079-1100.
- Bartlett, M. S. (1950). Tests of significance in factor analysis. *British Journal of Psychology, Statistical Section*, 3, 77-85.
- Bentler, P. M. (1990). Comparative fit indexes in structural models. *Psychological Bulletin*, 107(2), 238.
- Buja, A., & Eyuboglu, N. (1992). Remarks on parallel analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 27(4), 509-540.
- Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1, 245-276.
- Cochran, W. G. (1940). The analysis of variances when experimental errors follow the Poisson or binomial laws. *The Annals of Mathematical Statistics*, 11, 335-347.
- Cohen. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Crawford, A. V., Green, S. B., Levy, R., Lo, W. J., Scott, L., Svetina, D., & Thompson, M. S. (2010). Evaluation of parallel analysis methods for determining the number of factors. *Educational and Psychological Measurement*, 70(6), 885-901.
- Dinno, A. (2009). Exploring the sensitivity of Horn's parallel analysis to the distributional form of random data. *Multivariate Behavioral Research*, 44(3), 362-388.
- Fabrigar, L. R., Wegener, D. T., MacCallum, R. C., & Strahan, E. J. (1999). Evaluating the use of exploratory factor analysis in psychological research. *Psychological Methods*, 4, 272-299.
- Fava, J. L., & Velicer, W. F. (1992). The effects of overextraction on factor and component analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 27(3), 387-415.
- Floyd, F. J., & Widaman, K. F. (1995). Factor analysis in the development and refinement of clinical assessment instruments. *Psychological Assessment*, 7(3), 286.
- Glorfeld, L. W. (1995). An improvement on Horn's parallel analysis methodology for selecting the correct number of factors to retain. *Educational and Psychological Measurement*, 55, 377-393.
- Green, S. B., Levy, R., Thompson, M. S., Lu, M., & Lo, W.-J. (2012). A proposed solution to the problem with using completely random data to assess the number of factors with parallel analysis. *Educational and Psychological Measurement*, 72, 357-374.
- Green, S. B., Thompson, M. S., Levy, R., & Lo, W.-J. (2014). Type I and II error rates and

- overall accuracy of the revised parallel analysis method for determining the number of factors. *Educational and Psychological Measurement*, 73, 428-457.
- Guttman, L. (1954). Some necessary conditions for common-factor analysis. *Psychometrika*, 19, 149-161.
- Hayton, J. C., Allen, D. G., & Scarpello, V. (2004). Factor retention decisions in exploratory factor analysis: A tutorial on parallel analysis. *Organizational Research Methods*, 7, 191-205.
- Horn, J. L. (1965). A rationale and test for the number of factors in factor analysis. *Psychometrika*, 30(2), 179-185.
- Hu, L., & Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 6(1), 1-55
- Humphreys, L. G., & Ilgen, D. R. (1969). Note on a criterion for the number of common factors. *Educational and Psychological Measurement*, 29(3), 571-578.
- Jaeger, T. F. (2008). Categorical data analysis: Away from ANOVAs (transformation or not) and towards logit mixed models. *Journal of Memory and Language*, 59(4), 434-446.
- Kaiser, H. F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and Psychological Measurement*, 20(1), 141-151.
- MacCallum, R. C., Browne, M., & Sugawara, H., (1996). Power analysis and determination of sample size for covariance structure modeling. *Psychological Methods*, 1, 130-149.
- MacCallum, R. C., Widaman, K. F., & Zhang, S., & Hong, S. (1999). Sample size in factor analysis. *Psychological Methods*, 4, 84-99.
- Mulaik, S. A. (2010). *Foundations of factor analysis* (2nd ed.). Boca Raton, FL: Cahpman & Hall.
- Nunnally, J. C., & Bernstein, I. H. (1994). *Psychometric theory* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- O'Connor, B. P. (2000). SPSS and SAS programs for determining the number of components using parallel analysis and Velicer's MAP test. *Behavior Research Methods, Instrumentation, and Computers*, 32, 396-402.
- Preacher, K. J., & MacCallum, R. C. (2003). Repairing Tom Swift's electric factor analysis machine. *Understanding Statistics*, 2(1), 13-43.
- Preacher, K. J., Zhang, G., Kim, C., & Mels, G. (2013). Choosing the optimal number of factors in exploratory factor analysis: A model selection perspective. *Multivariate Behavioral Research*, 48(1), 28-56.
- R Core Team (2017). R: A Language And Environment For Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Reise, S. P., Waller, N. G., & Comrey, A. L. (2000). Factor analysis and scale revision. *Psychological Assessment*, 12, 287-297.
- Steiger, J. H., & Lind, J. C. (1980, May). *Statistically based tests for the number of common factors*. Paper presented at the annual meeting of the Psychometric Society, Iowa City, IA.
- Timmerman, M. E. & Lorenzo-Seva U. (2011). Dimensionality assessment of ordered polytomous items with parallel analysis.

- Psychological Methods*, 16(2), 209-220.
- Tucker, L. R., & Lewis, C. (1973). A reliability coefficient for maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 38(1), 1-10.
- Turner, N. E. (1998). The effect of common variance and structure pattern on random data eigenvalues: Implications for the accuracy of parallel analysis. *Educational and Psychological Measurement*, 58(4), 541-568.
- Velicer, W. F. (1976). Determining the number of components from the matrix of partial correlations. *Psychometrika*, 41, 321-327.
- Velicer, W. F., Eaton, C. A., & Fava, J. L. (2000). Construct explication through factor or component analysis: A review and evaluation of alternative procedures for determining the number of factors or components. In E. Helmes (Ed.), *Problems and solutions in human assessment: Honoring Douglas N. Jackson at seventy*. (pp. 41-71). New York, NY: Kluwer Academic/Plenum.
- Zwick, W. R. & Velicer, W. F. (1986). Comparison of five rules for determining the number of components to retain. *Psychological Bulletin*, 99(3), 432-442.

1차원고접수 : 2017. 08. 25.

수정원고접수 : 2017. 10. 31.

최종게재결정 : 2017. 10. 31.

Evaluating the Accuracy of Parallel Analysis for Determining the Number of Common Factors

Sangdon Lim

Seungmin Jahng

Department of Psychology, Sungkyunkwan University

Parallel analysis is a method of estimating the number of factors by comparing the eigenvalues of sample data with the eigenvalues of random data. This method is considered to be theoretically more valid and empirically more accurate in estimating the number of factors than other methods, such as Kaiser method and scree test, that estimate the number of factors based on the eigenvalues. However, several criticisms have been raised about the validity of the rationale for parallel analysis and various modifications have been proposed. There have also been concerns about the conditions under which parallel analysis shows relatively low accuracy. The current study examined the rationale and limitations of the use of eigenvalues and parallel analysis to estimate the number of factors, and based on this, we specified the conditions under which the accuracy of parallel analysis may be low. We also examined, through a simulation, the effects of various factors that may affect the accuracy of parallel analysis and confirmed the conditions where cautions are needed when applying parallel analysis. The results of the simulation show that the accuracy of estimating the number of factors in the parallel analysis is greatly influenced by the size of factor correlations, the magnitude of factor loadings, the number of factors, and the number of variables per factor. In addition, we confirmed that the accuracy of the parallel analysis is significantly lower when a factor model includes a weak factor with low factor loadings. Overall, the accuracy of the parallel analysis for the reduced correlation matrix (PA-PAF) was higher than the parallel analysis for the correlation matrix (PA-PCA), which in particular, PA-PAF showed high accuracy when factor correlations were high, and PA-PCA showed high accuracy when factor correlations were low. Based on the results of the simulation analyses, we proposed sample sizes required for parallel analysis to provide accuracy of 90% or higher under conditions with different levels of factor correlation, factor loading, and the number of factors.

Key words : parallel analysis, number of factors, eigenvalues, reduced correlation matrix, sample size